École Normale Supérieure de Rennes, Université de Lille 1 **Année 2017–2018**
Vidal AGNIEL **Sous la direction de Catalin BADEA**
Université de Lille 1, Villeneuve d'Ascq
Mémoire : Calcul fonctionnel en théorie spectrale, applications à l'image numérique, et généralisations

---

RAPPORT DE MÉMOIRE

Table des matières

1 Théorèmes spectraux dans le cadre Hilbertien

Notations. —
- H est un espace de Hilbert complexe. On note $\|.\|_H$ sa norme (ou $\|.\|$ s'il n'y a pas d'ambiguités) et $< .,. >$ son produit scalaire associé.
- $\mathcal{L}(H)$ est l'ensemble des applications linéaires continues de H dans H.
- La partie réelle d'un opérateur A est $Re(A) := \frac{A+A^*}{2}$. Sa partie imaginaire est $Im(A) := \frac{A-A^*}{2i}$.
- $Re_{\geq a}$ désigne le demi-plan fermé des nombres complexes z tels que $Re(z) \geq a$. - Pour E un ensemble, $Conv(E)$ désigne l'enveloppe convexe de E.
- Le spectre ponctuel d'un opérateur A, $\sigma_p(A)$, est l'ensemble des valeurs propres de A.
- Le spectre approximatif de A est $\sigma_{app}(A) := \{\lambda \in \sigma(A) \text{ tq } \exists (x_n)_n,\ \|x_n\| = 1 \text{ et } (A-\lambda.I)x_n \to 0\}$. - Un opérateur A est dit à puissances bornées si $\sup_n(\|A^n\|) < +\infty$. C'est en particulier le cas si $r(A) < 1$.

Remarque 1.0.1. —
Les théorèmes de cette section concernent les opérateurs auto-adjoints. Leurs résultats diffèrent du théorème du calcul fonctionnel analytique qui est plus général et demande des conditions plus fortes. Ici, la propriété $\|A\| = r(A)$ valable pour tout opérateur normal offre de meilleurs résultats.
Il existe de même des théorèmes spectraux pour les opérateurs unitaires ainsi que pour les opérateurs normaux.

1.1 Théorèmes spectraux pour les opérateurs auto-adjoints : Version calcul fonctionnel

Théorème 1.1.1. *Théorème spectral pour les opérateurs auto-adjoints : Version calcul fonctionnel* —
Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ auto-adjoint.
Alors il existe un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres $\Phi_A : \begin{array}{ccc} C^0([-\|A\|, \|A\|], \mathbb{C}) & \to & \mathcal{L}(H) \\ f & \mapsto & \Phi_A(f) =: f(A) \end{array}$
tel que :
i) $\Phi_A(x \mapsto x) = A$ et $\|\Phi_A(f)\| \leq \|f\|_{L^\infty}$.
De plus, ce morphisme est uniquement déterminé par la condition ci-dessus.

Démonstration.
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme complexe. Comme A est auto-adjoint, on a $A = A^*$ et $\sigma(A) \subset [-\|A\|, \|A\|]$.
Ainsi, on a $P(A)^* = \overline{P}(A^*) = \overline{P}(A)$.
Cela donne : $P(A).P(A)^* = P(A) \cdot \overline{P}(A) = \overline{P}(A) \cdot P(A) = P(A)^* \cdot P(A)$.
Donc, $P(A)$ est normal.
Ainsi, $\|P(A)\| = r(P(A)) = \sup_{\lambda \in \sigma(P(A))} |\lambda| = \sup_{\gamma \in \sigma(A)} |P(\gamma)| \leq \|P\|_{L^\infty([-\|A\|, \|A\|])}$.

Soit $f \in C^0([-\|A\|, \|A\|], \mathbb{C})$. Comme les fonctions polynômiales complexes sont denses dans cet espace pour $\|.\|_{L^\infty}$, il existe une suite de polynômes $(P_n)_n$
qui converge uniformément vers f sur $[-\|A\|, \|A\|]$.
La suite $(P_n)_n$ est ainsi de Cauchy pour $\|.\|_{L^\infty([-\|A\|, \|A\|])}$. Donc la suite $(P_n(A))_n$ est
de Cauchy pour $\|.\|$ car on a $\|P_n(A) - P_m(A)\| \leq \|P_n - P_m\|_{L^\infty([-\|A\|, \|A\|])}$.
Par conséquent, $(P_n(A))_n$ converge vers un $f(A)$ dans $\mathcal{L}(H)$ car il est complet pour $\|.\|$.
On a : $\|f(A)\| = \limsup_n(\|P_n(A)\|) \leq \limsup_n(\|P_n\|_{L^\infty([-\|A\|, \|A\|])}) = \|f\|_{L^\infty([-\|A\|, \|A\|])}$.

Soit maintenant $(Q_n)_n$ une autre suite de fonctions polynômiales complexes convergeant uniformément vers f sur $[-\|A\|, \|A\|]$. Par le même argument, $(Q_n(A))_n$ converge pour $\|.\|$ vers un $f_2(A)$.
Or, en considérant la suite $(R_n)_n$ définie par : $R_n := \left| \begin{array}{l} P_k \text{ si n=2k} \\ Q_k \text{ si n=2k+1} \end{array} \right.$
cette suite converge elle aussi uniformément vers f sur $[-\|A\|, \|A\|]$, donc la suite $(R_n(A))_n$ converge pour $\|.\|$, d'où $f(A) = f_2(A)$.
Ainsi, $f(A)$ ne dépend pas de la suite $(P_n)_n$ considérée.

L'application Φ_A est ainsi bien définie sur $C^0([-\|A\|,\|A\|],\mathbb{C})$ tout entier, et vérifie $\Phi_A(x\mapsto x)=A$ et $\|\Phi_A(f)\|\leq\|f\|_{L^\infty}$.
L'application Φ_A est de plus un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres sur le sous-ev des fonctions polynômiales, et cette propriété s'étend à $C^0([-\|A\|,\|A\|],\mathbb{C})$ tout entier par densité des fonctions polynômiales et par unicité de la limite.

Si l'on se donne Ψ_A un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres vérifiant $\Phi_A(x\mapsto x)=A$ et $\|\Phi_A(f)\|\leq\|f\|_{L^\infty}$, alors Ψ_A est linéaire continu et coïncide avec Φ_A sur le sous-ev engendré par les fonctions polynômiales, donc $\Psi_A\equiv\Phi_A$ par densité de l'espace et continuité des deux applications. □

Proposition 1.1.2. —
Soit $A\in\mathcal{L}(H)$ et $f\in C^0([-\|A\|,\|A\|])$. On a de plus :
i) $\|f(A)\|=\sup_{\sigma(A)}|f|$
ii) $f(A)$ est normal et $f(A)^*=\overline{f}(A)$.
iii) $f(A)\in\overline{C[A]}$
iv) $f|_{\sigma(A)}\equiv 0$ si et seulement si $f(A)=0$.
v) $\sigma(f(A))=f(\sigma(A))$.

Démonstration.
i) On a $\|f(A)\|=\limsup_n(\|P_n(A)\|)=\limsup_n(\sup_{\sigma(A)}|P_n|)=\sup_{\sigma(A)}|f|$, d'après la preuve précédente.
ii) On a $P(A)\cdot P(A)^*=P(A)^*\cdot P(A)$ et $P(A)^*=\overline{P}(A)$ pour toute fonction polynômiale. Cette propriété s'étend par densité des fonctions polynômiales et par continuité de Φ_A à $C^0([-\|A\|,\|A\|])$ tout entier.
iii) $f(A)$ est une limite de polynômes en A, via la densité des fonctions polynômiales dans $C^0([-\|A\|,\|A\|])$ et via le théorème 1.1.1.
iv) Cela découle immédiatement de i).
v) Soit $\lambda\in\mathbb{C}$. On veut montrer que $f(A)-\lambda$ est non-inversible si et seulement si $\lambda\in f(\sigma(A))$.
Quitte à considérer $g=f-\lambda$, on peut supposer que $\lambda=0$.
$\Leftarrow$) Si $0=f(\gamma)$ avec $\gamma\in\sigma(A)$, alors pour $(P_n)_n$ suite de fonctions polynômiales convergeant uniformément vers f sur $[-\|A\|,\|A\|]$, on a $(P_n)(\gamma)\to_n f(\gamma)=0$.
Si $P_n(A)$ est non-inversible pour une infinité de n, alors $f(A)$ est non-inversible car l'ensemble des opérateurs non-inversibles est un fermé de $\mathcal{L}(H)$.
Sinon, les $P_n(A)$ sont tous inversibles à partir d'un certain rang. Or, $P_n(\gamma)\in P_n(\sigma(A))=\sigma(P_n(A))$, $P_n(\gamma)\neq 0$, et $P_n(A)$ est normal.
Donc, on a $\|(P_n(A))^{-1}\|=sup_{\delta\in\sigma(P_n(A))}|\delta|^{-1}\geq|P_n(\gamma)|^{-1}\to+\infty$.
Ainsi, la suite des $(P_n(A))^{-1}$ ne converge pas. Ainsi, $f(A)$ n'est pas inversible, car sinon $((P_n(A))^{-1})_n$ convergerait vers $f(A)^{-1}$ par continuité de $B\mapsto B^{-1}$. Donc, $0\in\sigma(f(A))$.

$\Rightarrow$) Si $f(A)$ est non-inversible, supposons par l'absurde que $0\notin f(\sigma(A))$.
Comme $\sigma(A)$ est compact, on a alors des $R>r>0$ tels que $f(\sigma(A))\subset\overline{\mathbb{D}(0,R)}-\mathbb{D}(0,r)$.
Donc, pour $(P_n)_n$ suite de fonctions polynômiales convergeant uniformément vers f sur $[-\|A\|,\|A\|]$, on a $P_n(\sigma(A))\subset\overline{\mathbb{D}(0,2R)}-\mathbb{D}(0,\frac{r}{2})$ à partir d'un certain rang n_0.
Pour $m,n\geq n_0$, on a $P_n(A)$ et $P_m(A)$ inversibles, et
$\|P_n(A)^{-1}-P_m(A)^{-1}\|=\sup_{\delta\in\sigma(A)}\left(|P_n(\delta)^{-1}-P_m(\delta)^{-1}|\right)$ car $P_n(A)^{-1}-P_m(A)^{-1}$ est normal et est une fraction rationnelle en A.
Or, $\sup_{\delta\in\sigma(A)}\left(|P_n(\delta)^{-1}-P_m(\delta)^{-1}|\right)\leq\sup_{\delta\in\sigma(A)}\left(\frac{4}{r^2}|P_n(\delta)-P_m(\delta)|\right)\leq\frac{4}{r^2}\|P_n-P_m\|_{L^\infty}$
car $x\to\frac{1}{x}$ est $\frac{4}{r^2}$-lipschitzienne sur $[-2R,-\frac{r}{2}]\bigcup[\frac{r}{2},2R]$.
Ainsi, la suite des $P_n(A)^{-1}$ est de Cauchy à partir d'un certain rang. Elle converge donc vers un $B\in\mathcal{L}(H)$. Et, comme $P_n(A)\cdot P_n(A)^{-1}=P_n(A)^{-1}\cdot P_n(A)=I_H$, on a $f(A)\cdot B=B\cdot f(A)=I_H$ par continuité, donc $f(A)$ est inversible, ce qui est absurde. Donc, $0\in f(\sigma(A))$. □

Remarque 1.1.3. —
Les résultats concernant le spectre de $f(A)$ ou l'écriture de $f(A)$ comme limite de polynômes en A sont similaires à ceux obtenus avec le théorème du calcul fonctionnel analytique. Cependant, seule la continuité est exigée pour pouvoir définir $f(A)$, et on ne s'intéresse qu'aux intervalles fermés contenant le spectre au lieu de regarder des voisinages ouverts de celui-ci.
Bien qu'il soit possible de réduire l'ensemble de définition à $\sigma(A)$ dans le cas auto-adjoint, les sections suivantes s'intéressent plutôt à réduire la régularité des fonctions que l'on peut évaluer, notamment afin de pouvoir évaluer des fonctions caractéristiques d'ensembles mesurables.
Dans le cas où $\sigma(A) \subset [0, +\infty[$, on retrouve la possibilité de définir $\sqrt{A}$ et l'on peut de même définir A^α avec $\alpha > 0$.

Dans le cas où A est unitaire, on peut démontrer de l'exacte même façon un résultat semblable au Théorème 1.1.2 où $[-\|A\|, \|A\|]$ est remplacé par $\partial\mathbb{D}$.
Les points ii) et iii) de la Proposition 1.1.3 deviennent alors $f(A)^* = \overline{f}(A^{-1})$ et $f(A) \in \overline{\mathbb{C}[A, A^{-1}]}$.

1.2 Théorème spectral pour les opérateurs auto-adjoints : Version applications boréliennes

Théorème 1.2.1. *Théorème spectral pour les opérateurs auto-adjoints : Version applications boréliennes*—
Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ auto-adjoint. Soit $\mathcal{B}([-\|A\|, \|A\|], \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions mesurables bornées sur $[-\|A\|, \|A\|]$ à valeurs complexes, muni de $\|f\|_\infty := \sup_{[-\|A\|,\|A\|]} |f|$.
Alors il existe un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres Φ_A : $\begin{array}{ccc} \mathcal{B}([-([-\|A\|, \|A\|], \mathbb{C}) & \to & \mathcal{L}(H) \\ f & \mapsto & f(A) := \Phi_A(f) \end{array}$
tel que :
i) $\Phi_A(x \mapsto x) = A$ et $\|\Phi_A(f)\| \le \|f\|_{L^\infty}$.
ii) $\left\{ \begin{array}{l} f_n(x) \to f(x), \forall x \\ \sup\limits_{n,x} |f_n(x)| < +\infty \end{array} \right.$ implique $\Phi_A(f_n)(h) \to_n \Phi_A(f)(h)$, $\forall h \in H$.
De plus, ce morphisme est uniquement déterminé par les conditions ci-dessus.

Démonstration.
Voir [6], Théorème 5.1.5, p.292-295.
La référence utilise le théorème spectral version calcul fonctionnel pour démontrer le théorème spectral version mesure spectrale, qui sert à démontrer le théorème spectral version opérateurs de multiplication, qui sert lui-même à démontrer ce théorème.

Preuve de l'unicité :
Soit Ψ_A un autre morphisme entre ces $\mathbb{C}$-algèbres vérifiant $i)$ et $ii)$.
D'après $i)$ et d'après le Théorème 1.1.1, Ψ_A et Φ_A coïncident sur $C^0([-\|A\|, \|A\|], \mathbb{C})$.
Pour U un ouvert de $[-\|A\|, \|A\|]$ et $g_n(x) := \left| \begin{array}{l} 0 \text{ si } d(x,U) \ge \frac{1}{n} \\ 1 - n.d(x,U) \text{ sinon} \end{array} \right.$
les fonctions g_n sont continues, bornées par 1, et convergent ponctuellement vers χ_U.
De fait, par $ii)$, Ψ_A et Φ_A coïncident en χ_U.
Or, pour U borélien, $\chi_{U^c} = 1 - \chi_U$. Pour $(U_n)_n$ suite de boréliens, $\prod\limits_{i=1}^n \chi_{U_i} = \chi_{\bigcap_i^n U_i}$ et $(\prod\limits_{i=1}^n \chi_{U_i})_n$ est une suite uniformément bornée qui converge ponctuellement vers $\chi_{\bigcap_i U_i}$.
Par propriété de morphisme d'algèbres et par $ii)$, l'ensemble des boréliens U tels que $\Phi_A(\chi_U) = \Psi_A(\chi_U)$ contient tous les ouverts de $[-\|A\|, \|A\|]$, est stable par passage au complémentaire, et est stable par intersection dénombrable.
Il est alors égal à la σ-algèbre des boréliens de $[-\|A\|, \|A\|]$.
Par linéarité, Ψ_A et Φ_A coïncident sur les combinaisons linéaires de fonctions caractéristiques de boréliens de $[-\|A\|, \|A\|]$.
Comme pour f mesurable bornée sur $[-\|A\|, \|A\|]$, il existe une suite $(f_n)_n$ de combinaisons linéaires de fonctions caractéristiques de boréliens qui converge ponctuellement vers f et est uniformément

bornée, on obtient par $ii)$ que $\Psi_A(f) = \Phi_A(f)$, et par conséquent que $\Psi_A \equiv \Phi_A$. □

Remarque 1.2.2. —
Pour f continue, on retrouve $\Phi_A(f) = f(A)$.
On a $f(A)^* = \overline{f}(A)$ tout comme dans le cas continu, mais on n'a plus $f(A) \in \overline{\mathbb{C}[A]}$ à cause de la convergence forte dans $ii)$ qui n'implique pas une convergence en norme.
Pour $\Omega \subset \mathbb{R}$ mesurable, on peut définir $P_\Omega(A) = \Phi_A(\chi_\Omega)$, qui est une projection orthogonale car χ_Ω est à valeurs réelles et vérifie $\chi_\Omega^2 = \chi_\Omega$.
Pour $\{\Omega_j, j \geq 0\}$ mesurables et 2 à 2 d'intersection vide,
on a : $\forall\, h \in H,\ \sum\limits_{j=1}^{n} P_{\Omega_j}(A)(h) \to_n P_{\bigcup_j \Omega_j}(A)(h)$.

1.3 Théorème spectral pour les opérateurs auto-adjoints : Version résolution de l'identité

Definition 1.3.1. —
Une **résolution de l'identité** dans H est $E : t \in \mathbb{R} \mapsto E_t \in \mathcal{L}(H)$ avec :
i) E_t est une projection orthogonale $\forall t \in \mathbb{R}$.
ii) $t < s \Rightarrow E_t \leq E_s$
iii) $\forall x \in H$, $E_t(x) \to_{t\to-\infty} 0$ et $E_t(x) \to_{t\to+\infty} x$
iv) $\forall x \in H$, $\forall s \in \mathbb{R}$, $E_t(x) \to_{t\to s^+} E_s(x)$
Si on a $a < b$ tels que $\begin{cases} E_t = 0,\ \forall t < a \\ E_t = I_H,\ \forall t > b \end{cases}$, on dit que le support de E est dans $[a, b]$.

Proposition 1.3.2. —
Soit E une résolution de l'identité à support dans $[-R, R]$, et $g \in C^0([-R, R])$.
On pose $\Phi_n(g) := \sum\limits_{j=-2^n}^{2^n} g(\frac{jR}{2^n})[E_{\frac{jR}{2^n}} - E_{\frac{(j-1)R}{2^n}}] \in \mathcal{L}(H)$.
Alors, $\Phi_n(g)$ converge en norme vers un $\Phi(g)$, et $\Phi : C^0([-R, R]) \to \mathcal{L}(H)$ est un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres de norme 1, avec $\Phi(g)^* = \Phi(\overline{g})$.

Démonstration.
Soit $x \in H$. Soit $n > 0$. Soient $k < j \in \mathbb{Z}$.
Par propriétés $i)$ et $ii)$ de la résolution de l'identité E, les $(E_{\frac{jR}{2^n}} - E_{\frac{(j-1)R}{2^n}})$ sont des projections orthogonales, et on a $Im(E_{\frac{jR}{2^n}} - E_{\frac{(j-1)R}{2^n}}) \perp Im(E_{\frac{kR}{2^n}} - E_{\frac{(k-1)R}{2^n}})$.
Donc toutes les projections de la définition de Φ_n sont orthogonales 2 à 2.
Ainsi, $\|\Phi_n(g)(x)\|^2 = \sum\limits_j |g(\frac{jR}{2^n})|^2 \|(E_{\frac{jR}{2^n}} - E_{\frac{(j-1)R}{2^n}})x\|^2$

$\Rightarrow \|\Phi_n(g)(x)\|^2 \leq \sup\limits_j(|g(\frac{jR}{2^n})|^2) \left(\sum\limits_j \|(E_{\frac{jR}{2^n}} - E_{\frac{(j-1)R}{2^n}})x\|^2 \right)$.
$\Rightarrow \|\Phi_n(g)(x)\|^2 \leq \sup\limits_j(|g(\frac{jR}{2^n})|^2) \cdot \|(E_R - E_{-R\frac{2^n+1}{2^n}})(x)\|^2 = \sup\limits_j(|g(\frac{jR}{2^n})|^2)\|(I_H - 0)x\|^2$.

Soit $l > n$. On a alors : $\Phi_n(g) = \sum\limits_{j=-2^n}^{2^n} \left(\sum\limits_{a=0}^{2^{l-n}-1} g(\frac{jR}{2^n})[E_{\frac{R(j.2^{l-n}-a)}{2^l}} - E_{\frac{(j.2^{l-n}-a-1)R}{2^l}}] \right)$ par télescopage.

D'où $\Phi_n(g) = \sum\limits_{k=-2^l}^{2^l} g(\lceil \frac{k}{2^{l-n}} \rceil \frac{2^{l-n}R}{2^l})[E_{\frac{kR}{2^l}} - E_{\frac{(k-1)R}{2^l}}]$.
Ainsi, $\|(\Phi_l(g) - \Phi_n(g))(x)\|^2 = \left(\sum\limits_k \left| g(\lceil \frac{k}{2^{l-n}} \rceil \frac{2^{l-n}R}{2^l}) - g(\frac{kR}{2^l}) \right|^2 \right) \|[E_{\frac{kR}{2^l}} - E_{\frac{(k-1)R}{2^l}}]x\|^2$
D'où $\|(\Phi_l(g) - \Phi_n(g))(x)\|^2 \leq \sup\limits_{|a-b|<R2^{-n}} |g(a) - g(b)|^2 . \|x\|^2$ par une majoration similaire à la précédente.
Comme g est continue sur le compact $[-R, R]$, elle est uniformément continue, donc son module

d'uniforme continuité est continu en 0.
La suite $(\Phi_n(g))_n$ est ainsi de Cauchy pour $\|.\|$, donc converge vers un $\Phi(g)$.

Par définition de Φ_n, on a : $\Phi_n(g+\lambda.h) = \Phi_n(g) + \lambda.\Phi_n(h)$, et $\Phi_n(g)^* = \Phi_n(\overline{g})$. On a montré que $\|\Phi_n(g)\| \leq \|g\|_\infty$, et on a $\Phi_n(g.h) = \Phi_n(g).\Phi_n(h)$ par orthogonalité des $Im(E_{\frac{jR}{2^n}} - E_{\frac{(j-1)R}{2^n}})$.
L'application Φ hérite ainsi de toutes ces propriétés par passage à la limite. □

Théorème 1.3.3. *Théorème spectral : Version résolution de l'identité* —
Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ auto-adjoint.
Alors il existe une résolution de l'identité E à support dans $[-\|A\|, \|A\|]$ telle que : A = $\Phi(x \mapsto x)$.

Démonstration.
En utilisant le Théorème 1.2.1, posons $E_t := \Phi_A(\chi_{]-\infty,t]})$, où $\chi_{]-\infty,t]}$ est vue comme définie sur $[-\|A\|, \|A\|]$. Comme $\chi^2_{]-\infty,t]} = \chi_{]-\infty,t]}$ et comme cette fonction est à valeur positives, E_t est une projection orthogonale.
La propriété $ii)$ du Théorème 1.2.1 permet de conclure que E est bien une résolution de l'identité.
Pour $t < -\|A\|$ on a $E_t = \Phi_A(0) = 0$, et pour $t > \|A\|$ on a $E_t = \Phi_A(1) = 1$, car les fonctions ne sont regardées que sur $[-\|A\|, \|A\|]$. Donc, E est à support dans $[-\|A\|, \|A\|]$.

Montrons alors que pour Φ l'application associée à cette résolution de l'identité E,
on a bien $\Phi(x \mapsto x) = A$. Posons $R := \|A\|$, et calculons les applications Φ_n :
$\Phi_n(g) = \sum_{j=-2^n}^{2^n} g(\frac{jR}{2^n})[E_{\frac{jR}{2^n}} - E_{\frac{(j-1)R}{2^n}}] = \Phi_A\left(\sum_j g(\frac{jR}{2^n})\chi_{]\frac{(j-1)R}{2^n},\frac{jR}{2^n}]}\right).$
Ainsi, $\Phi_n(x \mapsto x) = \Phi_A(q_n)$, avec $q_n = \sum_j \frac{jR}{2^n}\chi_{]\frac{(j-1)R}{2^n},\frac{jR}{2^n}]}$
On obtient alors : $|q_n(x)| \leq R = \|A\|, \forall x \in \mathbb{R}$, et $\|q_n - (x \mapsto x)\|_{L^\infty([-\|A\|,\|A\|])} \leq \frac{R}{2^n}$.
On a donc $\Phi_n(x \mapsto x) = \Phi_A(q_n) \to \Phi_A(x \mapsto x) = A$ par continuité de Φ_A.
Comme $\Phi_n(x \mapsto x)$ converge vers $\Phi(x \mapsto x)$, on a bien $\Phi(x \mapsto x) = A$. □

Proposition 1.3.4. —
La résolution de l'identité E est uniquement déterminée par A.
On a ainsi une correspondance bijective entre les opérateurs auto-adjoints et les résolutions de l'identité à support borné.
De plus, l'application Φ définie à partir de la résolution de l'identité E coïncide avec l'application Φ_A.

Démonstration.
Soit F une autre résolution de l'identité à support dans $[-R, R]$, avec $R = \|A\|$, dont l'application Ψ associée vérifie $\Psi(x \mapsto x) = A$.
Alors, pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, on a $\Psi(x \mapsto P(x)) = P(A) = \Phi_A(P)$.
Comme ces deux fonctions sont continues sur $C^0([-R, R])$, et que les fonctions polynômiales y sont denses, elles sont égales sur cet ensemble.

Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé et $n \geq 1$. Posons $g_n(s) := \left| \begin{array}{l} 1 \text{ si } s \leq t \\ 1 - n(s-t) \text{ si } t \leq s \leq t + \frac{1}{n} \\ 0 \text{ si } s \geq t + \frac{1}{n} \end{array} \right.$
La fonction g_n est alors continue, et la suite $(g_n)_n$ est bornée et converge ponctuellement vers $\chi_{]-\infty,t]}$.
Ainsi, d'une part, $\forall h \in H$, $\Phi_A(g_n)(h) \to \Phi_A(\chi_{]-\infty,t]})(h) = E_t(h)$.
D'autre part, on a que $\Psi_m(g_n)$ est auto-adjoint $\forall m > 0$ car g_n est à valeurs réelles,
et avec $F_t \leq \Psi_m(g_n) \leq F_{t+\frac{1}{n}}$ par construction de g_n et par définition de Ψ_m.
On obtient donc $F_t \leq \Psi(g_n) \leq F_{t+\frac{1}{n}}$ par passage à la limite en m.
Comme on a aussi $F_{t+\frac{1}{n}}(h) \to_n F_t(h), \forall h \in H$, on obtient
de même $< F_{t+\frac{1}{n}}(h), h > \to < F_t(h), h >, \forall h \in H$.
Ceci implique que $< \Psi(g_n)(h), h > \to_n < F_t(h), h >$ par théorème des gendarmes.
Donc, $\forall h \in H$, on a $< E_t(h), h > = < F_t(h), h >$, d'où $E_t = F_t \; \forall \, t \in R$. □

Proposition 1.3.5. —
Soit A un opérateur auto-adjoint, et E sa résoluion de l'identité associée.
Alors, on a $\sigma(A) = \{t \text{ tq } \forall \varepsilon > 0,\, E_{t-\varepsilon} \neq E_{t+\varepsilon}\}$.
Ainsi, le spectre de A est l'ensemble des points de stricte croissance de la résolution de l'identité associée à A.

Démonstration.
- Soit $\lambda \in \{t \text{ tq } \forall \varepsilon > 0,\, E_{t-\varepsilon} \neq E_{t+\varepsilon}\}$. Soit $\varepsilon > 0$, et soit $\phi_\varepsilon \in Im(E_{\lambda-\varepsilon} - E_{\lambda+\varepsilon})$ de norme 1.
Pour tout $n > 0$, on a alors : $\Phi_n(x \mapsto (x-\lambda))(\phi_\varepsilon) = \Phi_n(x \mapsto (x-\lambda)) \cdot (E_{\lambda-\varepsilon} - E_{\lambda+\varepsilon})(\phi_\varepsilon)$
$\Rightarrow \Phi_n(x \mapsto (x-\lambda))(\phi_\varepsilon) = \Phi_n(x \mapsto (x-\lambda)\chi_{]\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon]}(x))(\phi_\varepsilon)$, car les $E_t - E_s$ sont des projections.
En passant à la norme, on obtient : $\|\Phi_n(x \mapsto (x-\lambda))(\phi_\varepsilon)\| \leq \|x \mapsto (x-\lambda)\chi_{]\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon]}(x)\|_\infty \cdot \|\phi_\varepsilon\| = \varepsilon \cdot 1$.
En passant à la limite, on obtient : $\|(A - \lambda \cdot I_H)(\phi_\varepsilon)\| \leq \varepsilon$.
Ceci implique que λ est dans le spectre approximatif de A, donc $\lambda \in \sigma(A)$.
- Soit $\lambda \notin \{t \text{ tq } \forall \varepsilon > 0,\, E_{t-\varepsilon} \neq E_{t+\varepsilon}\}$.
Soit $\varepsilon > 0$ tel que $E_{\lambda-\varepsilon} = E_{\lambda+\varepsilon}$. Soit n_0 tel que $\frac{1}{2^{n_0}} < \frac{1}{4\varepsilon}$.
Par propriété $ii)$ des résolutions de l'identité, $E_{\lambda-\varepsilon} = E_{\lambda+\varepsilon}$ implique que E_t est constante sur $[\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon]$.
Posons $g(x) := \left| \begin{array}{l} \frac{1}{x-\lambda} \text{ si } |x-\lambda| \geq \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 \text{ si } |x-\lambda| \leq \frac{\varepsilon}{4} \end{array} \right.$ et prolongée affinement sur $]\lambda - \frac{\varepsilon}{2}, \lambda - \frac{\varepsilon}{4}[$ et $]\lambda + \frac{\varepsilon}{4}, \lambda + \frac{\varepsilon}{2}[$.
Cette fonction est alors continue.
Ainsi, $\forall n \geq n_0$, $\Phi_n(g) = \sum_{j=-2^n}^{2^n} (\frac{jR}{2^n} - \lambda)^{-1}[E_{\frac{jR}{2^n}} - E_{\frac{(j-1)R}{2^n}}]$ car $|\frac{jR}{2^n} - \lambda| \leq \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow E_{\frac{jR}{2^n}} = E_{\frac{(j-1)R}{2^n}}$.
D'où :

$$I_h = \Phi_n(1) = \Phi_n(g) \cdot \Phi_n(x \mapsto (x-\lambda)) = \Phi_n(g \cdot (x \mapsto (x-\lambda))) = \Phi_n(x \mapsto (x-\lambda)) \cdot \Phi_n(g)$$

En passant à la limite, on obtient $(A - \lambda \cdot I_H) \cdot \Phi(g) = \Phi(g) \cdot (A - \lambda \cdot I_H) = I_H$.
Donc, $\lambda \notin \sigma(A)$. □

Remarque 1.3.6. —
Il est possible de définir une mesure à partir d'une résolution de l'identité bornée, et l'on peut montrer qu'alors $\Phi(g)$ n'est autre que $\int_{-R}^{R} g(t)dE_t$.

Références :
[6] SIMON Barry, *Operator theory : A comprehensive course in Analysis, Part 4* ; Ch.5.1, p.287-300.
[14] RIESZ Frédéric, SZ.-NAGY Béla, *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Ch.106-110.

2 Théorèmes d'extension ou de dilatation d'opérateurs

2.1 Théorèmes d'extension ou de dilatation

Théorème 2.1.1. *Théorème d'extension de Nagy —*
Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ tel que $\|A\| \leq 1$.
Alors, il existe $\tilde{H}$ un espace de Hilbert contenant H, et $C \in \mathcal{L}(\tilde{H})$ une co-isométrie sur $\tilde{H}$ qui est une **extension** de A : $\begin{cases} C(H) \subset H \\ C|_H = A \end{cases}$

Théorème 2.1.2. *Théorème de dilatation de Nagy —*
Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ tel que $\|A\| \leq 1$.
Alors, A admet une **dilatation unitaire** : il existe un espace de Hilbert $\tilde{H}$ contenant H, et $U \in \mathcal{L}(\tilde{H})$ un opérateur unitaire sur $\tilde{H}$ tel que $A^n = P_H \cdot U^n \cdot P_H, \forall\, n \geq 1$,
où P_H est la projection orthogonale sur H.
De plus, la réciproque est vraie.

Théorème 2.1.3. *Théorème de de Branges, Rovnyak —*
Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. On a l'équivalence :
i) $\|A\| \leq 1$ et $\|A^n(x)\| \to 0\ \forall x \in H$.
ii) A est unitairement semblable à une restriction de l'opérateur de décalage à gauche :
Il existe un espace de Hilbert $\tilde{H}$, un sous-ev fermé F de $l^2(\mathbb{N}, \tilde{H})$ stable par l'opérateur de décalage à gauche S_+^*, et une isométrie linéaire bijective $V : H \to F$ tels que $A = V^{-1} \cdot S_+^*|_F \cdot V$.

2.2 Application à un théorème spectral pour les contractions

Théorème 2.2.1. *Inégalité de Von-Neumann —*
Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ tel que $\|A\| \leq 1$, et soit $P \in \mathbb{C}[X]$.
Alors, on a $\|P(A)\| \leq \|P\|_{L^\infty(\overline{\mathbb{D}})}$.

Théorème 2.2.2. *Corollaire de l'inégalité de Von-Neumann —*
Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ tel que $\|A\| \leq 1$.
Alors il existe un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres Φ_A : $\begin{array}{ccc} C^0(\overline{\mathbb{D}}) \cap Hol(\mathbb{D}) & \to & \mathcal{L}(H) \\ f & \mapsto & \Phi_A(f) =: f(A) \end{array}$
qui vérifie en particulier : $\Phi_A(x \mapsto x) = A$ et $\|f(A)\| \leq \|f\|_{L^\infty(\overline{\mathbb{D}})}$.

Un Lemme préliminaire sera utile :

Lemme 2.2.3. —
La sous-algèbre des fonctions polynômiales est dense dans l'algèbre du disque $C^0(\overline{\mathbb{D}}) \cap Hol(\mathbb{D})$ pour la norme $\|.\|_{L^\infty(\overline{\mathbb{D}})}$.
Pour $f \in C^0(\overline{\mathbb{D}}) \cap Hol(\mathbb{D})$, $0 \leq r < 1$, et $f_r(z) = f(rz)$ on a de plus $f_r \to_{r \to 1^-} f$.

Démonstration.
Soit $f \in C^0(\overline{\mathbb{D}}) \cap Hol(\mathbb{D})$ et $\varepsilon > 0$. Comme f est continue sur $\overline{\mathbb{D}}$, elle y est uniformément continue.
Soit $1 > \alpha > 0$ tel que $|x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
Pour $0 \leq r < 1$, définissons $f_r(z) := f(rz)$. Les fonctions f_r sont alors dans $C^0(\overline{\mathbb{D}}) \cap Hol(\mathbb{D})$.
Pour $1 - \alpha < r < 1$, on a $\|f - f_r\|_\infty \leq \varepsilon$ car $\forall\, z \in \overline{\mathbb{D}}$, $|z - rz| = (1-r)|z| \leq (1-r) < \alpha$.
On a donc bien $f_r \to_{r \to 1^-} f$.
Pour $f(z) = \sum_n a_n.z^n$ la décomposition en série entière de f, la décomposition en série entière de f_r est $f_r(z) = \sum_n a_n.r^n.z^n$ et a un rayon de CV supérieur ou égal à $\frac{1}{r} > 1$.
Donc $\sum_n a_n.r^n.z^n$ converge absolument sur $\overline{\mathbb{D}}$. On a donc un $N > 0$ tel que $\sum\limits_{n \geq N+1} |a_n| r^n < \varepsilon$.

En posant $P(z) = \sum\limits_{n=0}^{N} a_n.r^n.z^n$, on a alors $\|P-f\|_\infty \leq \|P-f_r\|_\infty + \|f_r - f\|_\infty \leq \sum\limits_{n\geq N+1} |a_n| r^n + \varepsilon < 2.\varepsilon$, ce qui conclut. □

Démonstration. Preuve du Théorème 2.2.2
Remarquons en premier lieu que $C^0(\overline{\mathbb{D}}) \cap Hol(\mathbb{D})$ est une sous-algèbre de l'algèbre de Banach $(C^0(\overline{\mathbb{D}}), \|.\|_{L^\infty(\overline{\mathbb{D}})})$, et que le Théorème de Montel implique que cette sous-algèbre est fermée pour $\|.\|_{L^\infty(\overline{\mathbb{D}})}$.
Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ tel que $\|A\| \leq 1$. D'après le Théorème 2.1.1 de dilatation de Nagy, on a $\tilde{H}$ un Hilbert contenant H, et $U \in \mathcal{L}(\tilde{H})$ un opérateur unitaire sur $\tilde{H}$ tel que $A^n = P_H \cdot U^n \cdot P_H$, $\forall n \geq 1$.
On regarde par la suite A comme élément de $\mathcal{L}(\tilde{H})$.
Soit $P(z) = b_0 + b_1 z + ... + b_n z^n$, on a alors :

$$\begin{aligned} P(A) &= b_0.A^0 + b_1.A + ... + b_n A^n = b_0 P_H \cdot U^0 \cdot P_H + ... + b_n P_H \cdot U^n \cdot P_H \\ &= P_H \cdot (b_0.U^0 + ... + b_n U^n) \cdot P_H = P_H \cdot P(U) \cdot P_H \end{aligned}$$

Donc, pour toute fonction polynômiale P, on a $P(A) = P_H \cdot P(U) \cdot P_H$.
Ainsi, $\|P(A)\| \leq 1.\|P(U)\|.1 \leq \|P\|_{L^\infty(\overline{\mathbb{D}})}$.
L'application $\Phi_A : f \mapsto f(A)$ est donc bien définie, et est linéaire et continue sur la sous-algèbre des fonctions polynômiales dans $C^0(\overline{\mathbb{D}}) \cap Hol(\mathbb{D})$. Elle s'étend donc sur l'adhérence de cet espace, qui est $C^0(\overline{\mathbb{D}}) \cap Hol(\mathbb{D})$ tout entier d'après le Lemme 2.2.3. □

Corollaire 2.2.4. —
Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ tel que $\|A\| \leq 1$. Soit $\tilde{H}$ un espace Hilbert contenant H, et $U \in \mathcal{L}(\tilde{H})$ un opérateur unitaire sur $\tilde{H}$ tel que $A^n = P_H \cdot U^n \cdot P_H$, $\forall n \geq 1$.
Alors, pour tout $f \in C^0(\overline{\mathbb{D}}) \cap Hol(\mathbb{D})$, on a $f(A) = P_H \cdot f(U) \cdot P_H$.

Remarque 2.2.5. —
Les opérateurs de rayon numérique ≤ 1 et de classe C_ρ seront accompagnés dans la suite de résultats similaires au Théorème 2.2.2 et au Corollaire 2.2.4, ce qui apportera des liens à toutes ces familles d'opérateurs.
Dans le cas général, il faudra ajouter en premier lieu la condition $f(0) = 0$ car les théorèmes similaires au théorème de dilatation de Nagy ne donnent des résultats que pour A^n avec $n \geq 1$.

3 Image numérique et rayon numérique d'un opérateur

3.1 Définitions et premières propriétés

Definition 3.1.1. —
Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. L'**image numérique** de A est $W(A) := \{< Ax, x > , x \in H, \|x\| = 1\}$.
On définit aussi le **rayon numérique** de A, $w(A) := \sup\{|z|, z \in W(A)\}$.

Definition 3.1.2. —
Dans la suite, on utilisera parfois $Re_{\geq a} := \{z \in \mathbb{C}$ tq $Re(z) \geq a\}$ pour un $a \in \mathbb{R}$,
voire $Re_{>a} := \{z \in \mathbb{C}$ tq $Re(z) > a\}$.

Proposition 3.1.3. *[10]*—
Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. On a :
i) $W(\lambda.A + \gamma.I) = \lambda.W(A) + \{\gamma\}$, $\forall \lambda, \gamma \in \mathbb{C}$, donc $w(\lambda.A + \gamma.I) \leq |\lambda|.w(A) + |\gamma|$
ii) $W(A^*) = \{\overline{\lambda}, \lambda \in W(A)\}$, donc $w(A^*) = w(A)$.
iii) $\sigma(A) \subset \overline{W(A)} \subset \overline{\mathbb{D}(0, \|A\|)}$, donc $r(A) \leq w(A) \leq \|A\|$
iv) $W(A)$ est convexe, donc $Conv(\sigma(A)) \subset \overline{W(A)}$.
v) En dimension finie, $W(A)$ est compact.
En dimension infinie, $W(A)$ est borné mais pas forcément fermé.
vi) Pour la **partie réelle** de A, $Re(A) := \frac{A+A^*}{2}$, on a $W(Re(A)) = \{Re(\lambda), \lambda \in W(A)\}$.
Donc $Re(A) \geq 0 \Leftrightarrow W(A) \subset Re_{\geq 0} = \{z$ tq $Re(z) \geq 0\}$.
vii) Pour U un opérateur unitaire, on a $W(UAU^{-1}) = W(A)$.

Proposition 3.1.4. *[10]*—
Soient $A, B \in \mathcal{L}(H)$. On a :
i) $W(A) = \{0\} \Leftrightarrow A = 0$.
ii) $W(A) \subset \mathbb{R} \Leftrightarrow$ A est auto-adjoint. Si de plus $A \geq 0$, alors $W(A) \subset \mathbb{R}_+$.
iii) $W(A + B) \subset W(A) + W(B)$.

Proposition 3.1.5. *[10]*—
Soit $M \in M_2(\mathbb{C})$. On a :
i) $W(M)$ est un cercle si et seulement si M est unitairement semblable à $\begin{pmatrix} \lambda_1 & a \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.
ii) $W(M)$ est une ellipse ssi M est unitairement semblable à $\begin{pmatrix} \lambda_1 & a \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.
iii) $W(M)$ est un segment si et seulement si M est unitairement semblable à $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$.
iv) $W(M)$ est un point si et seulement si $M = \lambda_1.I_2$, $\lambda_1 \in \mathbb{C}$.

Proposition 3.1.6. —
Soient $A_1 \in \mathcal{L}(H_1)$ et $A_2 \in \mathcal{L}(H_2)$. Alors, pour $A_1 \oplus A_2 \in \mathcal{L}(H_1 \oplus H_2)$,
on a $\|A_1 \oplus A_2\| = \max(\|A_1\|, \|A_2\|)$, $\sigma(A_1 \oplus A_2) = \sigma(A_1) \cup \sigma(A_2)$,
et $W(A_1 \oplus A_2) = Conv(W(A_1) \cup W(A_2))$ avec $w(A_1 \oplus A_2) = \max(w(A_1), w(A_2))$.

Exemple 3.1.7. —
- Pour $T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on obtient $\sigma(T) = \{0\}$, $\|T\| = 2$, $W(T) = \overline{\mathbb{D}(0, 1)}$, et $w(T) = 1$.
L'image numérique de T contient strictement l'enveloppe convexe de son spectre, et $w(T) < \|T\|$.
- Pour $T_2 = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, on obtient $\sigma(T) = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$, $\|T\| = r(T)$,
et $W(T) = Conv(\{\lambda_1, .., \lambda_n\}) = Conv(\sigma(T))$.
L'image numérique de T_2 est l'enveloppe convexe de son spectre, et $w(T_2) = \|T_2\|$.
- Pour T_3 l'opérateur de décalage à droite sur $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$, on a $\|T_3\| = 1$, $\sigma(T_3) = \overline{\mathbb{D}}$,$W(T_3) = \mathbb{D}$, et $w(T_3) = 1$.
L'image numérique de T_3 est strictement contenue $Conv(\sigma(T_3))$,

et $w(T_3) = \|T_3\|$.
- Pour $T_4 = T_3 \oplus T$, on a $\|T_4\| = 2$,$w(T_4) = 1$, et $\sigma(T_4) = \overline{\mathbb{D}} = W(T_4)$.
L'image numérique de T_4 est l'enveloppe convexe de son spectre, et $w(T_4) < \|T_4\|$.

Proposition 3.1.8. —
Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ tel que $A^2 = A$ et $w(A) \leq 1$.
Alors A est une projection orthogonale.

Démonstration.
Comme $A^2 = A$, A est une projection. Montrons que $\mathrm{Im}(A)^\perp \subset Ker(A)$ afin de prouver que $\mathrm{Im}(A) \perp Ker(A)$, et donc que A est une projection orthogonale.
Soit $x \in \mathrm{Im}(A)^\perp$. Soit $y = Ax$, et $t \in \mathbb{R}$.
On a : $A(x + ty) = Ax + t.A^2x = Ax + t.Ax = (1 + t)y$.
Ainsi, $\langle A(x + ty), x + ty\rangle = \langle (1 + t)y, x + ty\rangle = \langle (1 + t)y, t.y\rangle = (1 + t)t\|y\|^2$, car $x \perp y$.
On a ainsi : $(1 + t)t\|y\|^2 \leq |\langle A(x + ty), x + ty\rangle| \leq w(A)\|x + ty\|^2 \leq 1.(\|x\|^2 + t^2\|y\|^2)$, car $x \perp y$.
Donc, $t\|y\|^2 \leq \|x\|^2$.
Cela étant vrai pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a alors $\|Ax\| = \|y\| = 0$, donc $\mathrm{Im}(A)^\perp \subset Ker(A)$. □

3.2 Comportement de l'image numérique

Proposition 3.2.1. —
Soit $(A_n)_n$ une suite de $\mathcal{L}(H)$ convergeant vers A.
Alors, $W(A_n)$ converge vers $W(A)$ au sens : $\forall \varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que $\forall n \geq n_0$,
on a $W(A_n) \subset W(A) + \mathbb{D}(0, \varepsilon)$.

Démonstration.
On a $W(A_n) = W(A + (A_n - A)) \subset W(A) + W(A_n - A) \subset W(A) + \mathbb{D}(0, \|A_n - A\|)$.
Or, $\|A_n - A\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ à partir d'un certain rang. □

Proposition 3.2.2. —
Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ tel que $W(A)$ est inclus dans un segment. Alors A est normal.

Démonstration. Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ tels que $W(A) \subset [\lambda_1, \lambda_2]$.
Si $\lambda_1 = \lambda_2$, alors $A = \lambda_1.I$ d'après le point $i)$ de la Proposition 3.1.4, et c'est bon.
Sinon, soit $\theta := arg(\lambda_2 - \lambda_1)$.
Pour $B = e^{-i\theta}(A - \lambda_1.I)$, on a $W(B) \subset \mathbb{R}$, donc B est auto-adjoint, donc normal.
Comme on a $A = e^{i\theta}.B + \lambda_1.I$, A est un polynôme en B, donc est un opérateur normal. □

Proposition 3.2.3. —
Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ normal. Alors $\overline{W(A)} = Conv(\sigma(A))$.

Démonstration.
On a déjà $Conv(\sigma(A)) \subset \overline{W(A)}$. Il reste à montrer l'inclusion réciproque. Comme ce sont deux convexes fermés, cela revient à montrer que tout demi-plan fermé P contenant $Conv(\sigma(A))$ contient aussi $\overline{W(A)}$.
Quitte à considérer $e^{it}.A + b$, on peut supposer grâce au point $i)$ de la proposition 3.1.3
que $P = Re_{\leq 0} := \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } Re(z) \leq 0\}$.
Supposons par l'absurde que $\overline{W(A)}$ n'est pas inclus dans ce demi-plan. Cela sera donc aussi le cas pour $W(A)$. On aura donc un $x \in H$, $\|x\| = 1$, tel que $< Ax, x >= a + ib$ avec $a > 0$.

Prenons un $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$. Donc, $c \notin \sigma(A)$. Comme A est normal, $(A - c.I_H)^{-1}$ aussi, ce qui donne $\|(A - c.I_H)^{-1}\| = r((A - c.I_H)^{-1}) = (d(c, \sigma(A)))^{-1}$.
Ainsi, $\forall\, y \in H$, on a $\|y\|.d(c, \sigma(A)) = \|y\|.\|(A - c.I_H)^{-1}\|^{-1} \leq \|(A - c.I_H)(y)\|$.
En écrivant $Ax = (a + ib)x + \tilde{x}$ avec $\langle x, \tilde{x}\rangle = 0$, on obtient :
$c^2 \leq d(c, \sigma(A))^2.1 \leq \|(A - c.I_h)(x)\|^2 = \|(a + ib - c)x + \tilde{x}\|^2 = (a - c)^2 + b^2 + \|\tilde{x}\|^2$
Ainsi, on a $2ac \leq a^2 + b^2 + \|\tilde{x}\|^2$, et ce $\forall c > 0$ et avec $a > 0$, ce qui est impossible. □

Remarque 3.2.4. —
Dans le cas où A est normal, on a une localisation précise de l'adhérence de son image numérique, et son rayon numérique $w(A)$ vaut $\|A\|$.
Si les points extrêmaux de $Conv(\sigma(A))$ sont des valeurs propres de A, alors ces points seront dans $W(A)$ et on aura $W(A) = Conv(\sigma(A))$. En uilisant des opérateurs normaux de rang fini égal à n, on peut ainsi réaliser n'importe quel polygone convexe à n côtés comme une image numérique.
En dimension infinie, on ne sait cependant pas directement quelles parties du bord de $\overline{W(A)}$ sont dans $W(A)$.
Par exemple, pour $H = l^2(\mathbb{N}^*, \mathbb{C})$ et $A((x_n)_n) = (\frac{1}{n}x_n)_n$, A est auto-adjoint positif,
et $\sigma(A) = \{\frac{1}{n},\, n \geq 1\} \cup \{0\}$ mais $W(A) =]0, 1]$.

Proposition 3.2.5. *[9]*—
Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ et soit λ un point de $\partial W(A)$ qui soit un "coin" de $\overline{W(A)}$:
Il existe une section angulaire fermée centrée en λ et d'angle $\alpha < \pi$ contenant $\overline{W(A)}$.
Si $\lambda \in W(A)$, alors λ est une valeur propre de A.

Démonstration.
Si $dim(H) = 1$, $W(A)$ est réduit à un point et $A = \lambda.I_H$.
Supposons donc $dim(H) > 1$. Par hypothèse, soit $x \in H$, $\|x\| = 1$ tel que $\langle Ax, x\rangle = \lambda$.
Supposons par l'absurde que $Ax \in H$ n'est pas colinéaire à x, et posons P la projection orthogonale sur $Vect(\{x, Ax\})$.
D'une part, l'image numérique de $P \cdot A \cdot P$ sur $Vect(\{x, Ax\})$ est incluse dans celle de A sur H,
car $\forall\, h \in Vect(\{x, Ax\})$, $\langle P \cdot A \cdot Ph, h\rangle = \langle APh, Ph\rangle = \langle Ah, h\rangle$.
D'autre part, $P \cdot A \cdot P$ est un opérateur sur un espace de Hilbert de dimension 2. Son image numérique est alors une ellipse pleine, un segment, ou un point, d'après la Proposition 3.1.5.
Comme λ est dans la frontière de $W(A)$, il est dans la frontière de $W(P \cdot A \cdot P)$. Le convexe $P \cdot A \cdot P$ ne peut alors pas être une ellipse. En effet, le bord d'une ellipse est une courbe fermée de classe C^1, et une utilisation du théorème des fonctions implicites permet de montrer que pour toute section angulaire fermée d'angle $\alpha < \pi$ centrée en un point p du bord de l'ellipse, il y a un morceau de l'ellipse dans un voisinage de p qui n'est pas contenu dans cette section angulaire.
Or, en dimension 2, $W(P{\cdot}A{\cdot}P)$ est un segment (ou un point) si et seulement si $P{\cdot}A{\cdot}P$ est unitairement équivalent à une matrice diagonale, de valeurs propres égales aux extrémités du segment, d'après la Proposition 3.1.5. Ainsi, λ est une valeur propre de $P \cdot A \cdot P$. Notons γ l'autre valeur propre,
et $\{e_1, e_2\}$ une base orthonormée de vecteurs propres associés. On a alors $x = a.e_1 + b.e_2$ et
$\lambda = \langle P \cdot A \cdot Px, x\rangle = \langle Ax, x\rangle = \lambda|a|^2 + \gamma|b|^2 = \lambda.1 + |b|^2(\gamma - \lambda)$.
De fait, on a soit $\gamma = \lambda$, auquel cas $P \cdot A \cdot P = \lambda.I_2$ et $Ax = \lambda.x$,
soit $b = 0$, auquel cas $x = a.e_1$ et $Ax = \lambda.x$. On obtient dans les deux cas une contradiction.
Ainsi, Ax est colinéaire à x, donc $Ax = \lambda.x$, ce qui conclut. $\square$

Proposition 3.2.6. *[10]*—
Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ et soit λ un point de $\partial W(A)$ qui soit un coin de $\overline{W(A)}$:
Il existe une section angulaire fermée centrée en λ et d'angle $\alpha < \pi$ contenant $\overline{W(A)}$.
Alors λ est un élément du spectre approximatif de A.

Un Lemme préliminaire est nécessaire :

Lemme 3.2.7. *[11]*—
Soit H un espace de Hilbert. Alors il existe un espace de Hilbert $\mathcal{K}$ dans lequel H s'injecte isométriquement, et une isométrie linéaire $i : \mathcal{L}(H) \mapsto \mathcal{L}(K)$ telle que $\forall A \in \mathcal{L}(H)$, on a $\sigma_{app}(A) = \sigma_p(i(A))$ et $W(i(A)) = \overline{W(A)}$.

Démonstration.
- Désignons par $glim$ une limite de Banach sur $l^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ qui prolonge la moyenne de Césaro.
Soit $E_1 = l^\infty(\mathbb{N}, H)$. On munit cet espace de la semi-norme $\|(x_n)_n\| := glim((\|x_n\|)_n)$.

Cette norme dérive de la forme sesquilinéaire alternée positive $\langle (x_n)_n, (y_n)_n \rangle := glim((\langle x_n, y_n \rangle)_n)$.
Soit $\mathcal{N} := \{(x_n)_n \in E_1 \text{ tq } \|(x_n)_n\| = 0\}$. Alors $\mathcal{N} := \{(x_n)_n \in E_1 \text{ tq } \langle (x_n)_n, (y_n)_n \rangle = 0, \forall (y_n)_n \in E_1\}$.
Donc, $\mathcal{N}$ est un sous-ev de E_1. Notons $E_2 := E_1/\mathcal{N}$.
La forme sesquilinéaire alternée positive $\langle ., . \rangle$ induit un produit scalaire hermitien sur E_2, qui devient un espace pré-Hilbertien.
On définit alors $\mathcal{K}$ le complété de E_2 pour sa norme hilbertienne.
On identifie H au sous-ev de $\mathcal{K}$ des classes de suites constantes. Cette identification est injective.
Un opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ définit une application linéaire sur E_1 par $A'((x_n)_n) = (Ax_n)_n$. Cette application préserve le sous-ev $\mathcal{N}$, ce qui induit une application linéaire $\tilde{A}$ sur E_2, qui vérifie $\|\tilde{A}\|_{\mathcal{L}(E_2)} = \|A\|$.
Cette application linéaire continue se prolonge par densité sur $\mathcal{K}$ tout entier, ce qui définit $i(A)$.
On vérifie alors que i est une isométrie linéaire.
- Soit $\gamma \in \sigma_{app}(A)$. On a $(x_n)_n$ dans H telle que $\|x_n\|_H = 1$ et $(A - \gamma.I)x_n \to 0$.
Cela induit l'existence d'un élément $y = \overline{(x_n)_n}$ dans $E_2 \subset \mathcal{K}$ tel que $(i(A) - \gamma.I)y = 0$,
donc $\gamma \in \sigma_p(i(A))$.
Réciproquement, pour $\gamma \in \sigma_p(i(A))$, on a $y \in \mathcal{K}$, $\|y\|_{\mathcal{K}} = 1$ tel que $(i(A) - \gamma.I)y = 0$.
Par densité de E_2 dans $\mathcal{K}$, on a une suite $(y_m)_m$ dans E_2 avec $\|y_m\|_{\mathcal{K}} = 1$ telle que $y_m \to y$.
Par continuité de $(i(A) - \gamma.I)$, on a $(i(A) - \gamma.I)y_m \to 0$.
Notons $y_m = \overline{(y_{m,n})_n}$. On a alors $\|(i(A) - \gamma.I)y_m\| = glim(\|(A - \gamma.I)y_{m,n}\|)$, et $\|y_{m,n}\| \to 1$. On peut ainsi extraire une suite $(x_k)_k$ d'éléments de H, avec $1-\varepsilon \leq \|x_k\| \leq 1+\varepsilon$ et telle que $\|(A-\gamma.I)x_k\| \to 0$.
Donc, $\gamma \in \sigma_{app}(A)$.
- Soit $z \in \overline{W(A)}$. On a une suite $(x_n)_n$ dans H avec $\|x_n\|_H = 1$ telle que $\langle Ax_n, x_n \rangle \to z$.
Cela induit l'existence d'un élément $y = \overline{(x_n)_n}$ dans $E_2 \subset \mathcal{K}$ tel que $\langle i(A)y, y \rangle = z$.
Enfin, pour tout $z \in W(i(A))$, $z = \langle i(A)y, y \rangle$ pour un $y \in \mathcal{K}$ avec $\|y\| = 1$. Par densité de E_2 dans $\mathcal{K}$, on a une suite $(y_m)_m$ dans E_2 avec $\|y_m\| = 1$ telle que $y_m \to y$.
Notons $y_m = \overline{(y_{m,n})_n}$. On a alors $\langle i(A)y_m, y_m \rangle = glim(\langle Ay_{m,n}, y_{m,n} \rangle)$, et $\|y_{m,n}\| \to 1$.
Ainsi, $\langle i(A)y_m, y_m \rangle \in \overline{W(A)}$, $\forall m \geq 1$, donc $z = langlei(A)y, y\rangle \in \overline{W(A)}$, ce qui conclut. □

Démonstration. Preuve de la Proposition 3.2.6
On applique la Proposition 3.2.5 à l'opérateur $i(A)$ du Lemme 3.2.7 afin de voir que λ est une valeur propre de $i(A)$, donc une valeur propre approchée de A. □

Corollaire 3.2.8. —
Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ normal.
Soit λ un point extrêmal de $\sigma(A)$. λ est une valeur propre de A si et seulement si $\lambda \in W(A)$.
Ainsi, $W(A)$ est fermé si et seulement si tous les points extrêmaux de $\sigma(A)$ sont des valeurs propres de A.

Démonstration.
D'après la Proposition 3.2.3, $\overline{W(A)} = Conv(\sigma(A))$, donc les points extrêmaux de $\sigma(A)$ sont les points extrêmaux de $\overline{W(A)}$.
La proposition 3.2.5 indique ainsi que si λ est dans $W(A)$, alors λ est une valeur propre de A.
Réciproquement, si λ est une valeur propre de A, on a $x \in H$,$\|x\| = 1$ tel que $\langle Ax, x \rangle = \lambda.\|x\|^2 = \lambda$, donc $\lambda \in W(A)$.
Enfin, comme $W(A)$ est convexe, on a $W(A) = \overline{W(A)}$ si et seulement si tous les points extrêmaux de $\overline{W(A)}$ sont dans $W(A)$. □

Proposition 3.2.9. —
Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. Soient P un demi-plan fermé de $\mathbb{C}$, $p \in \overset{\circ}{P}$, et p' le symétrique de p par rapport à ∂P.
Alors, $W(A) \subset P \Leftrightarrow \|(A - p.I)(A - p'I)^{-1}\| \leq 1$.
Dans le cas $P = Re_{\geq 0}$ et $p = 1$, cela donne : $W(A) \subset Re_{\geq 0} \Leftrightarrow \|(A - I)(A + I)^{-1}\| \leq 1$.

Démonstration.
L'opérateur $(A - p'I)$ est bien inversible car $\sigma(A) \subset P$ et car $p' \notin P$.

On a $P = e^{it}Re_{\geq 0} + b$, pour $b \in \mathbb{C}$ et $t \in \mathbb{R}$.
On se ramène à $P = Re_{\geq 0}$ quitte à remplacer A, p, p' par $\tilde{A}, \tilde{p}, \tilde{p}'$,
avec $A = e^{it}\tilde{A} + b$, $p = e^{it}\tilde{p} + b$, $p' = e^{it}\tilde{p}' + b$.
On a alors $p' = -\bar{p}$. La condition de l'énoncé devient ainsi :
$\|(A - p.I)(A - p'I)^{-1}\| \leq 1 \Leftrightarrow \|(A - p.I)(A + \bar{p}I)^{-1}x\|^2 \leq \|x\|^2, \forall x \in H$
$\Leftrightarrow \|(A - p.I)y\|^2 \leq \|(A + \bar{p}.I)y\|^2$, $\forall y \in H$, en posant $y = (A + \bar{p}.I)x$
$\Leftrightarrow -2Re(\langle Ay, p.y\rangle) \leq 2Re(\langle Ay, \bar{p}.y\rangle), \forall y \in H$
$\Leftrightarrow 0 \leq 2Re((p + \bar{p})\langle Ay, y\rangle), \forall y \in H$
$\Leftrightarrow 0 \leq (2Re(p)).2Re(\langle Ay, y\rangle), \forall y \in H$
$\Leftrightarrow 0 \leq Re(\langle Ay, y\rangle)$, $\forall y \in H$, car $Re(p) > 0$ vu que $p \in Re_{\geq 0}$.
$\Leftrightarrow W(A) \subset Re_{\geq 0}$. □

La Proposition 3.2.9 montre que l'on peut avoir une équivalence entre une condition purement sur la norme, et une condition purement sur l'image numérique.
Son énoncé "réciproque" sera utile dans la preuve de la prochaine proposition.

Lemme 3.2.10. —
Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. Alors on a $\|A\| \leq 1$ si et seulement si $r(A) \leq 1$ et $Re((I+zA)(I-zA)^{-1}) \geq 0, \forall\, z \in \mathbb{D}$.

Démonstration.
$\Rightarrow$) Soit $z \in \mathbb{D}$. On a $r(zA) \leq |z|.r(A) < 1$. Ainsi, $B_z := (I + zA)(I - zA)^{-1}$ est bien défini.
On a $I + B_z = 2(I - zA)^{-1}$, donc $I + B_z$ est inversible, et on a : $(B_z - I)(I + B_z)^{-1} = z.A$.
Comme $\|(B_z - I)(I + B_z)^{-1}\| \leq 1$ la Proposition 3.2.9 nous dit que $Re(B_z) \geq 0$.
$\Leftarrow$) Soit $z \in \mathbb{D}$. Comme $r(A) < 1$, les mêmes calculs que précédemment peuvent être effectués.
Comme $Re(B_z) \geq 0$, la Proposition 3.2.9 nous dit que $\|(B_z - I)(I + B_z)^{-1}\| = \|z.A\| \leq 1$.
On obtient alors $\|A\| \leq 1$ en faisant tendre $|z|$ vers 1. □

Proposition 3.2.11. —
Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. Alors on a :
$\|A\| \leq 1 \Leftrightarrow \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{int}A(n)$ converge absolument et est auto-adjoint positif, $\forall 0 \leq r < 1, \forall t \in \mathbb{R}$,

avec $A(n) := \left| \begin{array}{l} A^n \text{ si } n > 0 \\ I \text{ si } n = 0 \\ (A^*)^{|n|} \text{ si } n < 0 \end{array} \right.$

Démonstration.
- Montrons que lorsque $\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{int}A(n)$ converge absolument, $(I - re^{it}A)$ est inversible, et la somme de la série est égale à $Re((I + re^{it}A)(I - re^{it}A)^{-1})$.
La convergence absolue de cette série entraîne la convergence absolue de la série $\sum_{n\geq 0} r^n e^{int}A^n$, par définition de $A(n)$.
Cela entraîne que $(\sum_{n\geq 0} r^n e^{int}A^n) \cdot (I - re^{it}A) = (I - re^{it}A) \cdot (\sum_{n\geq 0} r^n e^{int}A^n) = I$,
donc que $(I - re^{it}A)$ est inversible.
Posons $B = (I + re^{it}A)(I - re^{it}A)^{-1}$. On a : $B = 2.(I - re^{it}A)^{-1} - I = I + \sum\limits_{n\geq 1} 2.r^n e^{int}A^n$.

Ainsi, $Re(B) = \frac{B+B^*}{2} = \sum\limits_{n>0} r^n e^{int}A^n + \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}I + \sum\limits_{n<0} r^{|n|}e^{int}(A^*)^{|n|} = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{int}A(n)$.

$\Rightarrow$) Soient $0 \leq r < 1$ et $t \in \mathbb{R}$. On a $\|rA\| \leq r < 1$, donc la série $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{int}A(n)$ converge absolument.
La somme de cette série est ainsi égale à $Re((I + re^{it}A)(I - re^{it}A)^{-1})$, qui est auto-adjoint positif d'après le Lemme 3.2.10.
$\Leftarrow$) D'après le raisonnement précédent, $(I - re^{it}A)$ est inversible et la somme de la série, qui est auto-adjointe positive, est égale à $Re((I + re^{it}A)(I - re^{it}A)^{-1})$.
Cela étant vrai pour tous $0 \leq r < 1$ et $t \in \mathbb{R}$, le Lemme 3.2.10 nous dit qu'alors $\|A\| \leq 1$. □

Proposition 3.2.12. —
Soient $A, B \in \mathcal{L}(H)$.
Si $0 \notin \overline{W(A)}$, alors A est inversible et $\sigma(A^{-1} \cdot B) \subset \frac{\overline{W(B)}}{\overline{W(A)}} := \{\frac{b}{a}, b \in \overline{W(B)}, a \in \overline{W(A)}\}$.

Démonstration.
Comme $\sigma(A) \subset \overline{W(A)}$, A est bien inversible. On a $A^{-1} \cdot B - \lambda.I = A^{-1}(B - \lambda.A)$.
Ainsi, pour $\lambda \in \sigma(A^{-1} \cdot B)$, on a $0 \in \sigma(B - \lambda.A)$.
Or, si $0 \in \sigma(B - \lambda.A)$, alors $0 \in \overline{W(B - \lambda.A)} \subset \overline{W(B)} - \lambda.\overline{W(A)}$.
On a donc $a \in \overline{W(A)}, b \in \overline{W(B)}$ tels que $0 = b - \lambda.a$.
Comme $0 \notin \overline{W(A)}$, cela implique que $\lambda = \frac{b}{a}$. □

Corollaire 3.2.13. —
Soient $A, B \in \mathcal{L}(H)$, tels que A est auto-adjoint positif inversible, et $\sigma(B) \subset Re_{\geq 0}$.
Alors, $\sigma(A \cdot B) \subset Re_{\geq 0}$.

Démonstration.
Comme on a $A \geq 0$ et inversible, on a $A^{-1} \geq 0$, d'où $W(A^{-1}) \subset Conv(\sigma(A^{-1})) = [m, M]$, avec $0 < m \leq M$. On peut ainsi appliquer la Proposition 3.2.12 à A^{-1} et B pour obtenir : $\sigma(A \cdot B) = \sigma((A^{-1})^{-1} \cdot B) \subset \frac{\overline{W(B)}}{\overline{W(A^{-1})}}$.
Comme pour tous $a \in \overline{W(A^{-1})}, b \in \overline{W(B)}$ on a $a > 0$ et $Re(b) \geq 0$, on en déduit que $Re(\frac{b}{a}) \geq 0$. □

Proposition 3.2.14. —
Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ tel que $\overline{W(A)} \subset \{re^{it}$ tq $r > 0, t_1 \leq t \leq t_2\}$, avec $|t_2 - t_1| < \pi$.
Pour $A = U_A|A|$ la décomposition polaire de A, on a alors $\sigma(U_A) \subset \{e^{it}$ tq $t_1 \leq t \leq t_2\}$.

Démonstration.
Comme $0 \notin \overline{W(A)}$, A est inversible, donc $|A|$ et U_A sont inversibles.
On a ainsi $U_A = A \cdot |A|^{-1}$. Comme $A, |A|$ sont inversibles, on a $\sigma(A \cdot |A|^{-1}) = \sigma(|A|^{-1} \cdot A)$.
On applique la Proposition 3.2.12 à $|A|$ et A pour obtenir : $\sigma(U_A) = \sigma(|A|^{-1} \cdot A) \subset \frac{\overline{W(A)}}{\overline{W(|A|)}}$
Comme $|A|$ est auto-adjoint positif inversible, on a $\overline{W(|A|)} = Conv(\sigma(|A|)) = [m, M]$, avec $0 < m \leq M$. Donc, $\frac{\overline{W(A)}}{\overline{W(|A|)}} \subset \{re^{it}$ tq $r > 0, t_1 \leq t \leq t_2\}$.
Comme on a aussi $\sigma(U_A) \subset \partial\mathbb{D}$, ceci conclut. □

Proposition 3.2.15. —
Soient $A, B \in \mathcal{L}(H)$ tels que $A \cdot B = B \cdot A$ avec $A \geq 0$.
Alors, $W(A \cdot B) \subset W(A).W(B) := \{a.b, b \in W(B), a \in W(A)\}$.

Démonstration.
Comme A commute avec B, $\sqrt{A}$ commute avec B. Soit $x \in H$.
Si $Ax = 0$, alors $\langle A \cdot Bx, x\rangle = 0$, donc $0 \in W(A \cdot B)$ et $0 \in W(A).W(B)$.
Si $Ax \neq 0$, alors, en posant $y = \frac{\sqrt{A}x}{\|\sqrt{A}x\|}$, on a :
$\langle A \cdot Bx, x\rangle = \langle B \cdot \sqrt{A}x, \sqrt{A}x\rangle = \langle By, y\rangle.\|\sqrt{A}x\|^2 = \langle By, y\rangle\langle Ax, x\rangle \in W(B).W(A)$ □

Remarque 3.2.16. —
Si A et B commutent avec $A \geq 0$, on a ainsi $w(A \cdot B) \leq w(A).w(B) = \|A\|.w(B)$.
Cette inégalité sera par la suite étendue aux opérateurs A, B avec B commutant à A et à A^*.

3.3 Comportement du rayon numérique

Proposition 3.3.1. —
Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. Alors, on a $w(A) \leq \|A\| \leq 2w(A)$.

Démonstration.
Le point $iii)$ de la Proposition 3.1.3 apporte $w(A) \leq \|A\|$.
On rappelle que l'on a : $\|A\| = \sup \|x\| = \|y\| = 1(|\langle Ax, y\rangle|)$.
Or, pour $x, y \in H$ avec $\|x\| = \|y\| = 1$, une identité de polarisation nous donne :
$4\langle Ax, y\rangle \leq \sum_{k=1}^{4} \langle A(x + i^k y), (x + i^k y)\rangle$
D'où : $4|\langle Ax, y\rangle| = \sum_{k=1}^{4} |\langle A(x + i^k y), (x + i^k y)\rangle|$
$\Rightarrow 4|\langle Ax, y\rangle| \leq w(A)\|x + y\|^2 + w(A)\|x - y\|^2 + w(A)\|x + iy\|^2 + w(A)\|x - iy\|^2$
$\Rightarrow 4|\langle Ax, y\rangle| \leq w(A)[2(\|x\|^2 + \|y\|^2) + 2(\|x\|^2 + \|iy\|^2)] = 8w(A)$, en utilisant l'identité du parallélogramme.
En passant au sup pour $\|x\| = \|y\| = 1$, et en simplifiant, on obtient $\|A\| \leq 2w(A)$. □

Remarque 3.3.2. —
Contrairement au spectre pour lequel est possible d'avoir un rayon spectral aussi petit que l'on veut avec une norme aussi grande que l'on veut (avec des opérateurs nilpotents ou quasi-nilpotents par exemple), avoir des informations sur le rayon numérique de A apporte directement des informations sur la norme de A.

Proposition 3.3.3. —
L'application $A \mapsto w(A)$ est une norme sur $\mathcal{L}(H)$ qui est équivalente à $\|.\|$.
La norme $w(.)$ n'est pas une norme hilbertienne si $dim(H) \geq 2$.

Démonstration. Les propositions 3.1.3 et 3.1.4 apportent :
$w(\lambda.A) = |\lambda|w(A)$, $w(A + B) \leq w(A) + w(B)$, et $w(A) = 0$ si et seulement si $A = 0$.
L'application $w(.)$ est donc bien une norme sur $\mathcal{L}(H)$, qui est équivalente à $\|.\|$ d'après la Proposition 3.3.1.
Si $dim(H) = 1$, alors $w(T) = \|T\|$ car $\mathcal{L}(H)$ s'identifie à $M_1(\mathbb{C})$.
En posant $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $w(A_1) = w(A_2) = \frac{1}{2}$.
On a de plus $(A_1 + A_2)^* = (A_2 + A_1)$et $(A_1 - A_2)^* = (A_2 - A_1) = -(A_1 - A_2)$.
Ainsi, $(A_1 \pm A_2)$ sont des matrices normales, donc $w(A_1 \pm A_2) = r(A_1 \pm A_2) = 1$, car les valeurs propres de $A_1 + A_2$ sont $\{1, -1\}$ et les v.p. de $A_1 - A_2$ sont $\{i, -i\}$.
Mais l'identité du parallélogramme n'est pas vérifiée car $1^2 + 1^2 = 2 \neq 1 = 2(\frac{1}{2}^2 + \frac{1}{2}^2)$.
Ainsi, lorsque $dim(H) \geq 2$, on peut construire deux opérateurs A_1 et A_2 de rang 2 ne vérifiant pas l'identité du parallélogramme pour $w(.)$. Cette norme n'est donc pas hilbertienne dans ce cas. □

Proposition 3.3.4. —
Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. Si $w(A) = \|A\|$, alors $r(A) = \|A\|$.
De plus pour tout $\lambda \in W(A)$ tel que $|\lambda| = \|A\|$, λ est une valeur propre de A.

Démonstration. Comme $w(A) = \|A\|$, on a $\lambda \in \overline{W(A)}$ tel que $|\lambda| = \|A\|$. On a donc une suite $(z_n)_n$ avec $\|z_n\| = 1$ telle que $\langle Az_n, z_n\rangle \to \lambda$.
Quitte à considérer $e^{it}.A$, on peut supposer que $\lambda = \|A\|$. Calculons : $\|(A - \lambda.I)z_n\|^2 = \|Az_n\|^2 - \lambda\langle Az_n, z_n\rangle - \lambda\langle z_n, Az_n\rangle + \lambda^2\|z_n\|^2 \leq \|A\|^2.1 + \|A\|^2.1 - \|A\|(\langle Az_n, z_n\rangle + \langle z_n Az_n\rangle =$.
Or, le terme de droite converge vers $\|A\|^2 + \|A\|^2 - \|A\|(\|A\| + \|A\|) = 0$.
Comme $\|(A - \lambda.I)z_n\|^2 \geq 0$, on a ainsi $\|(A - \lambda.I)z_n\|^2 \to 0$, donc $\lambda \in \sigma_{app}(A)$, donc $r(A) \geq |\lambda| = \|A\|$, donc $r(A) = \|A\|$.
- Soit maintenant $\lambda \in W(A)$ tel que $|\lambda| = \|A\|$. On a $x \in H$ avec $\|x\| = 1$ tel que :
$\|A\| = |\lambda| = |\langle Ax, x\rangle| \leq \|A\|.1 = \|A\|$
L'inégalité est ainsi une égalité, ce qui implique que Ax et x sont colinéaires, donc $Ax = \gamma x$, pour un $\gamma \in \mathbb{C}$. On a alors $Ax = \lambda.x$ car $\lambda = \langle Ax, x\rangle = \gamma$, donc λ est bien une valeur propre de A. □

Remarque 3.3.5. —
Il a été vu dans l'Exemple 3.1.7 que la condition $r(A) = w(A)$ n'implique quant à elle pas que $r(A) = \|A\|$. Cette condition a cependant des implications qui seront abordées avec les classes C_ρ.

Proposition 3.3.6. —
Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. Si $\mathrm{Im}(A) \perp \mathrm{Im}(A^*)$, alors $w(A) = \frac{1}{2}\|A\|$.

Démonstration. Soit $x \in H$ avec $\|x\| = 1$. Comme $\mathrm{Im}(A^*)^{\perp} = Ker(A)$, on peut décomposer x en $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in Ker(A)$ et $x_2 \in \overline{\mathrm{Im}(A^*)}$.
On a alors : $\langle Ax, x\rangle = \langle Ax_2, x\rangle = \langle Ax_2, x_1\rangle$, car $Ax_1 = 0$ et car $x_2 \perp \mathrm{Im}(A)$.
Ainsi, on a $|\langle Ax, x\rangle| \leq \|A\|\|x_1\|\|x_2\| \leq \|A\| \frac{\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2}{2} = \frac{\|A\|}{2} \leq w(A)$.
En passant au sup pour $\|x\| = 1$, on obtient $w(A) \leq \frac{\|A\|}{2} \leq w(A)$, d'où $w(A) = \frac{1}{2}\|A\|$. □

Remarque 3.3.7. —
Dans la Propriété 3.3.4, λ se trouve alors être un point extrêmal de $\overline{W(A)}$,
et la condition $|\lambda| = \|A\|$ vient remplacer la condition $A^*A = AA^*$ de la Propriété 3.2.8. La conclusion reste cependant identique.
L'exemple principal d'opérateur vérifiant la Proposition 3.3.6 est celui de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ vu en 3.1.7.

Proposition 3.3.8. —
Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. Alors, $w(A^n) \leq w(A)^n$, $\forall n \geq 1$.

Démonstration.
Il existe une preuve élémentaire de cette proposition se servant seulement de la Proposition 3.5.1. (Voir [10][Théorème 2.1-1, p.28])
Deux autres preuves de cette proposition seront présentées en 3.5.5 et 3.5.12. □

Corollaire 3.3.9. —
Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ tel que $w(A) \leq 1$ et $A^n = A$ pour un $n \geq 2$.
Alors A^{n-1} est une projection orthogonale.

Démonstration.
On a $A^{2(n-1)} = A^n \cdot A^{n-2} = A \cdot A^{n-2} = A^{n-1}$, et $w(A^{n-1}) \leq w(A)^{n-1} \leq 1$.
La Proposition 3.1.8 appliquée à A^{n-1} permet de conclure. □

Remarque 3.3.10. —
Ainsi, la condition $w(A) \leq 1$ implique que $\|A^n\| \leq 2$, $\forall\, n \geq 1$.
Les opérateurs de rayon numérique inférieur à 1 sont donc des opérateurs à puissances bornées.
Cette famille d'opérateurs contient les opérateurs de norme inférieure à 1, mais ne contient pas tous les opérateurs à puissances bornées car $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'y figure par exemple pas.
Ce genre de résultats ont motivé la recherche autour de la condition $w(A) \leq 1$, ainsi qu'une généralisation de cette condition avec les classes C_ρ.

Cependant, la norme $w(.)$ n'est pas sous-multiplicative, ce que montre la proposition suivante.
Cette proposition montre aussi que lorsque A et B commutent, la constante qui apparaît dans l'inégalité de quasi-sous-multiplicativité peut être diminuée.
Si l'on rajoute la condition $A \geq 0$, la Proposition 3.2.15 montre qu'alors le rayon numérique est sous-multiplicatif, mais cela est principalement dû au fait que $w(A) = \|A\|$ dans ce cas, comme le montre la Proposition 3.5.6.

Proposition 3.3.11. —
Soient $A, B \in \mathcal{L}(H)$. On a les inégalités suivantes :
$i)$ $w(A \cdot B) \leq 4w(A).w(B)$
$ii)$ Si A et B commutent, alors $w(A \cdot B) \leq 2w(A).w(B)$.
Et ces inégalités sont optimales, au moins si $dim(H) \geq 4$.

Démonstration.
$i)$ On a $w(A \cdot B) \leq \|A \cdot B\| \leq \|A\|\|B\| \leq 2w(A).2w(B)$.

En prenant $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $w(A \cdot B) = r(A \cdot B) = 1$ et $w(A) = w(B) = \frac{1}{2}$, d'où $w(A \cdot B) = 4w(A).w(B)$.
$ii)$ Quitte à regarder $\frac{1}{w(A)}A$ et $\frac{1}{w(B)}B$, supposons que $w(A) = w(B) = 1$. Montrons que $w(A \cdot B) \leq 2$.
Comme A et B commutent, on a :
$4.w(A \cdot B) = w((A+B)^2 - (A-B)^2) \leq w((A+B)^2) + w((A-B)^2) \leq w(A+B)^2 + w(A-B)^2$
D'où $4.w(A \cdot B) \leq (w(A) + w(B))^2 + (w(A) + w(B))^2 = 8$
Donc, $w(A \cdot B) \leq 2$.
En prenant $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
on montre alors par le calcul que $A \cdot B = B \cdot A$ et que $w(A \cdot B) = w(A) = w(B) = \frac{1}{2}$,
d'où $w(A \cdot B) = 2w(A).w(B)$.

□

Proposition 3.3.12. *[5]—*
Il existe une constante $1 \leq \alpha < 2$ telle que pour tout Hilbert H, pour tous $A, B \in \mathcal{L}(H)$ qui commutent, on ait : $w(A \cdot B) \leq \alpha.w(A).\|B\|$.

Démonstration.
Définissons $\alpha := \sup\limits_{H \text{ Hilbert séparable}} \left(\sup\limits_{A,B \in \mathcal{L}(H) \text{ tq } AB=BA \text{ et } w(A)=\|B\|=1} (\sup\{w(A \cdot B)\}) \right)$
On a $\alpha \geq 1$ car $w(I \cdot I) = 1 = w(I).\|I\|$.
On a $\alpha \leq 2$ d'après le point $ii)$ de la Proposition 3.3.11.
On a ainsi une suite $(H_n)_n$ de Hilberts et deux suites $(A_n)_n, (B_n)_n$ d'opérateurs avec $A_n, B_n \in \mathcal{L}(H_n)$, $w(A_n) = \|B_n\| = 1$, A_n commute à B_n, et $(w(A_n \cdot B_n))_n$ qui converge en croissant vers α.
Définissons H la somme direct orthogonale des H_n : $H := \{(x_n)_n \text{ tq } x_n \in H_n \text{ et } \sum_{n\geq 0} \|x_n\|^2 < +\infty\}$.
H est alors un espace de Hilbert pour $\langle (x_n)_n, (y_n)_n \rangle = \sum\limits_{n\geq 0} \langle x_n, y_n \rangle$.
On définit les opérateurs A et B par : $A((x_n)_n) := (A_n x_n)_n$ et $B((x_n)_n) := (B_n x_n)_n$.
Grâce aux propriétés $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=\|y\|=1} (|\langle Ax, y \rangle|)$ et $w(A) = \sup\limits_{\|x\|=1} (|\langle Ax, x \rangle|)$,
on montre que $\|A\| = \sup_n(\|A_n\|) \leq 2$, $w(A) = \sup_n(w(A_n)) = 1$,$\|B\| = \sup_n(\|B_n\|) = 1$,
et $w(A \cdot B) = \sup_n(w(A_n \cdot B_n)) = \alpha$. Ainsi, la constante α est atteinte.

Supposons par l'absurde que $\alpha = 2$. On a donc $w(A \cdot B) = 2 = w(A).\|B\|$.
Or, on a : $\|A \cdot B\| \geq w(A \cdot B) = (2w(A))\|B\| \geq \|A\|.\|B\| \geq \|A \cdot B\|$.
Toutes les inégalités sont donc des égalités. On a ainsi $w(A \cdot B) = \|A \cdot B\|$, donc $r(A \cdot B) = \|A \cdot B\|$ par la Proposition 3.3.4, d'où $r(A \cdot B) = 2w(A)\|B\|$. Cependant, comme A et B commutent,
on a $r(A \cdot B) = \lim_n(\|(AB)^n\|^{\frac{1}{n}}) \leq \lim_n(\|A^n\|^{\frac{1}{n}}) \lim_n(\|B^n\|^{\frac{1}{n}}) = r(A).r(B) \leq w(A).\|B\|$.
Comme $w(A)$ et $\|B\|$ sont non-nuls, on aboutit à une contradiction. Donc, $\alpha < 2$. □

3.4 Application : Généralisation de $Re(z^n) \geq 0$ à $\mathcal{L}(H)$

On a la propriété suivante sur $\mathbb{C}$: Soit $z \in \mathbb{C}$. On a $Re(z^n) \geq 0$, $\forall n \geq 1$ si et seulement si $z \in \mathbb{R}_+$.
En utilisant les notions de partie réelle d'un opérateur, et de positivité d'un opérateur auto-adjoint, on peut formuler la condition $Re(A^n) \geq 0 \; \forall n \geq 1$ dans $\mathcal{L}(H)$.
La proposition suivante donne une généralisation du résultat sur $\mathbb{C}$.

Proposition 3.4.1. —
Soit $A \in \mathcal{L}(H)$.
On a $Re(A^n) \geq 0$, $\forall n \geq 1$ si et seulement si A est auto-adjoint positif.

La suite de cette sous-partie va s'intéresser à une preuve élémentaire de ce résultat.[15]

Lemme 3.4.2. —
Soient $A, B \in \mathcal{L}(H)$ auto-adjoints, avec $B \geq 0$ et $B^2 \geq A^2$.
Alors, $B \geq A$ et $B \geq -A$.

Démonstration.
Montrer $B \geq A$ revient à montrer que $\sigma(B - A) \subset \mathbb{R}_+$. Soit $x \in H$, $\|x\| = 1$, et $\lambda < 0$.
On a : $\|(B - \lambda.I)x\|^2 - \|Ax\|^2 = \langle (B^2 - A^2)x, x\rangle - 2\lambda.\langle Bx, x\rangle + \lambda^2 \geq \lambda^2$ car $\langle (B^2 - A^2)x, x\rangle \geq 0$ et $-2\lambda.\langle Bx, x\rangle \geq 0$.
Comme $B \geq 0$, $B - \lambda.I$ est inversible, et $\|B - \lambda.I\| \neq 0$.
Ainsi, $\|(B - A - \lambda.I)x\| \geq \|(B - \lambda.I)x\| - \|Ax\| = \frac{\|(B-\lambda.I)x\|^2 - \|Ax\|^2}{\|(B-\lambda.I)x\| + \|Ax\|} \geq \frac{\lambda^2}{\|B-\lambda.I\| + \|A\|} = \frac{\lambda^2}{\|B-\lambda.I\| + \|A\|}\|x\|$.
De fait, $B - A - \lambda.I$ est inversible pour tout $\lambda < 0$, donc $\sigma(B - A) \subset \mathbb{R}_+$.
En appliquant le même raisonnement en remplaçant A par $-A$, on obtient le résultat voulu. □

Lemme 3.4.3. —
Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ tel que $Re(A) \geq 0$ et $Re(A^2) \geq 0$. Alors, $W(A) \subset \{r.e^{it},\, r \geq 0 \text{ et } |t| \leq \frac{\pi}{4}\}$.

Démonstration.
Soit $x \in H$. On a : $\langle (Re(A)^2 - Im(A)^2)x, x\rangle = \frac{1}{2}\langle (A^2 + (A^*)^2)x, x\rangle = Re(\langle A^2x, x\rangle) = \langle Re(A^2)x, x\rangle$.
Ainsi, $Re(A^2) \geq 0$ si et seulement si $Re(A)^2 \geq Im(A)^2$. On a donc $Re(A) \geq 0$ et $Re(A)^2 \geq Im(A)^2$.
On peut alors appliquer le Lemme 3.4.2 à $Im(A)$ et $Re(A)$ afin d'obtenir $Re(A) \geq Im(A)$
et $Re(A) \geq -Im(A)$.
Ainsi, $W(A) \subset \{x + iy \text{ tq } x \geq 0, x \geq y, x \geq -y\} = \{r.e^{it},\, r \geq 0 \text{ et } |t| \leq \frac{\pi}{4}\}$. □

Corollaire 3.4.4. —
Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ tel que $Re(A) \geq 0$ et $W(A^2) \subset \{r.e^{it},\, r \geq 0 \text{ et } |t| \leq \alpha\frac{\pi}{2}\}$, avec $0 \leq \alpha < 1$.
Alors $W(A) \subset \{r.e^{it},\, r \geq 0 \text{ et } |t| \leq \alpha\frac{\pi}{4}\}$.

Démonstration.
Comme $0 \leq \alpha < 1$, on a $W(A^2) \subset \{r.e^{it},\, r \geq 0 \text{ et } |t| \leq \frac{\pi}{2}\}$, donc $Re(A^2) \geq 0$.
Le Lemme 3.4.3 appliqué à A nous donne $W(A) \subset \{r.e^{it},\, r \geq 0 \text{ et } |t| \leq \frac{\pi}{4}\}$.
Ainsi, on a $Re(e^{\pm i\frac{\pi}{4}}.A) \geq 0$. Ceci implique que, pour $C = exp(\pm i(1 - \alpha)\frac{\pi}{4}).A$, on a $Re(C) \geq 0$.
On a de plus $W(C^2) = W(A^2.\exp(\pm i(1 - \alpha)\frac{\pi}{2})) \subset \{r.e^{it},\, r \geq 0 \text{ et } |t| \leq \frac{\pi}{2}\}$ car $\alpha\frac{\pi}{2} + (1 - \alpha)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.
Le Lemme 3.4.3 appliqué à C nous donne $W(C) \subset \{r.e^{it},\, r \geq 0 \text{ et } |t| \leq \frac{\pi}{4}\}$.
Ainsi, on a $Re\left(e^{\pm i\frac{\pi}{4}}.C\right) = Re\left(\exp(\pm i\frac{\pi}{4} + \pm i(1 - \alpha)\frac{\pi}{4}).A\right) \geq 0$.
Or, $\exp(i\frac{\pi}{4} + i(1 - \alpha)\frac{\pi}{4}) = \exp(i(1 - \frac{\alpha}{2})\frac{\pi}{2})$.
Par conséquent, $Re\left(\exp(\pm i(1 - \frac{\alpha}{2})\frac{\pi}{2}).A\right) \geq 0$.
Donc, $W(A) \subset \{r.e^{it},\, r \geq 0 \text{ et } |t| \leq \alpha\frac{\pi}{4}\}$. □

Démonstration. Preuve de la Proposition 3.4.1
$\Rightarrow$) Si $A \geq 0$, alors $\sigma(A) \subset \mathbb{R}_+$. Donc, $\forall n \geq 1$, A^n est auto-adjoint et $\sigma(A^n) \subset \mathbb{R}_+$, d'où $A_n \geq 0$.
$\Leftarrow$) On a $Re(A^{2^n}) \geq 0$, $\forall n \geq 0$.
Soit $n \geq 0$. Le Lemme 3.4.3 appliqué à A^{2^n}, puis le Corollaire 3.4.4 appliqué successivement à $A^{2^{n-1}}, .., A$ avec α valant successivement $\frac{1}{2}, ..., \frac{1}{2^{n-1}}$ nous permettent de montrer que $W(A) \subset \{r.e^{it},\, r \geq 0 \text{ et } |t| \leq \alpha\frac{\pi}{2^n}\}$.
On en déduit alors que $W(A) \subset \mathbb{R}_+$, donc que $A \geq 0$. □

Remarque 3.4.5. —
Une preuve plus générale consiste à remarquer que $\forall \varepsilon > 0$ et $\forall n \geq 1$, $Re((A + \varepsilon.I)^n) \geq \varepsilon^n.I$. Cela permet d'utiliser un théorème de Kato à $(A + \varepsilon.I)^n - \varepsilon^n.I$ et $f(z) = (z + \varepsilon^n)^{\frac{1}{n}}$ dans $Hol(Re_{\geq \frac{-\varepsilon^n}{2}})$, afin d'obtenir $W(A + \varepsilon.I) \subset \{r.e^{it},\, r > 0 \text{ et } t \in [\frac{-\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}]\}$.(Voir Thm 3.5.16 ou [17], Thm.7)
Cela étant vrai pour tout n et pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $W(A) \subset \mathbb{R}_+$.
La démonstration de ce Théorème de Kato nécessitant de démontrer au préalable d'autres théorèmes avec plus ou moins de résultats préliminaires, une démonstration élémentaire de 3.4.1 a été préférée.

3.5 Théorèmes autour de la condition $w(A) \leq 1$

Proposition 3.5.1. —
Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. On a l'équivalence :
i) $w(A) \leq 1$.
ii) $Re(I - zA) \geq 0, \forall z \in \overline{\mathbb{D}}$
iii) $r(A) \leq 1$ et $Re((I - zA)^{-1}) \geq 0, \forall z \in \mathbb{D}$.

Un résultat préliminaire sera nécessaire pour cette preuve :

Lemme 3.5.2. —
Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ inversible.
Alors $Re(A) \geq 0$ si et seulement si $Re(A^{-1}) \geq 0$.

Démonstration.
Soit $x \in H$. On a $Re(\langle Ax, x\rangle) = Re(\overline{\langle x, Ax\rangle}) = Re(\langle x, Ax\rangle)$.
On a : $Re(A) \geq 0 \Leftrightarrow Re(\langle Ax, x\rangle) \geq 0, \forall x \in H$
$Re(A) \geq 0 \Leftrightarrow Re(\langle y, A^{-1}y\rangle) \geq 0, \forall y \in H$, en posant $y = Ax$, car A est inversible.
$Re(A) \geq 0 \Leftrightarrow Re(\langle A^{-1}y, y\rangle) \geq 0, \forall y \in H \Leftrightarrow Re(A^{-1}) \geq 0$. □

Démonstration. Preuve de la Proposition 3.5.1
$i) \Rightarrow ii)$ Soit $z \in \overline{\mathbb{D}}$ et $x \in H$. Comme $w(A) \leq 1$, on a : $Re(z\langle Ax, x\rangle) \leq |z||\langle Ax, x\rangle| \leq 1.\|x\|^2.1$
Ainsi, $\langle Re(I - zA)x, x\rangle = Re\left(\langle (I - zA)x, x\rangle\right) = \|x\|^2 - Re(z\langle Ax, x\rangle) \geq 0$, donc $Re(I - zA) \geq 0$.
$ii) \Rightarrow i)$ Soit $x \in H$ avec $\|x\| = 1$. On a $z = e^{it}$ tel que $\langle zAx, x\rangle = |\langle Ax, x\rangle| = Re(\langle zAx, x\rangle)$.
Comme $Re(I - zA) \geq 0$, les calculs précédents nous montrent que l'on a $Re(\langle zAx, x\rangle) \leq \|x\|^2 = 1$.
Donc, $|\langle Ax, x\rangle| \leq 1$. En passant au sup pour $\|x\| = 1$ on obtient $w(A) \leq 1$.
$ii) \Rightarrow iii)$ Comme $w(A) \leq 1$, on a $r(A) \leq 1$, donc $r(zA) \leq |z|$.
Ainsi, $(I - zA)$ est inversible pour tout $|z| < 1$.
On a alors $Re((I - zA)^{-1}) \geq 0, \forall z \in \mathbb{D}$ d'après le Lemme 3.5.2, et $r(A) \leq w(A) \leq 1$ d'après la première équivalence.
$iii) \Rightarrow ii)$ On a $Re(I - zA) \geq 0, \forall z \in \mathbb{D}$ grâce au Lemme 3.5.2.
On montre enfin que pour $z \in \partial\mathbb{D}$ on a $Re(I - zA) \geq 0$. En effet, pour toute suite $(z_n)_n$ convergeant vers z avec $z_n \in \mathbb{D}$, on a $Re(\langle (I - z_nA)x, x\rangle) \to Re(\langle (I - zA)x, x\rangle), \forall x \in H$ par continuité, ce qui permet d'en déduire que $Re(I - zA) \geq 0$. □

Théorème 3.5.3. —
Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. Alors on a :
$w(A) \leq 1 \Leftrightarrow \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{int}A_n$ converge absolument et est auto-adjoint positif, $\forall 0 \leq r < 1, \forall t \in \mathbb{R}$,

avec $A_n := \left| \begin{array}{l} \frac{1}{2}A^n \text{ si } n > 0 \\ I \text{ si } n = 0 \\ \frac{1}{2}(A^*)^{|n|} \text{ si } n < 0 \end{array} \right.$

Démonstration.
- Montrons que si la série $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{int}A_n$ converge absolument, alors $(I - re^{it}A)$ est inversible et la somme de la série vaut $Re((I - re^{it}A)^{-1})$.
La convergence absolue de cette série entraîne la convergence absolue de la série $\sum\limits_{n\geq 0} r^ne^{int}A^n$, par définition de A_n. Or, si la série $\sum\limits_{n\geq 0} r^ne^{int}A^n$ converge absolument, alors $(I - re^{it}A)$ est inversible et la somme de la série vaut $(I - re^{it}A)^{-1}$.
On a alors : $Re((I - re^{it}A)^{-1}) = \frac{1}{2}I + \sum\limits_{n>0} \frac{1}{2}r^ne^{int}A^n + \frac{1}{2}I + \sum\limits_{n<0} \frac{1}{2}.r^{|n|}e^{int}(A^*)^{|n|} = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{int}A_n$.
$\Rightarrow$) Soient $0 \leq r < 1$ et $t \in \mathbb{R}$. Comme $r(re^{it}A) = r < 1$, la série des $(re^{it}A)^n$ est

absolument convergente. Ainsi, la série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int} A_n$ est absolument convergente car $\sum_{n>0} \frac{1}{2} r^n e^{int} A^n$ et $\sum_{n<0} \frac{1}{2} r^{|n|} e^{int} (A^*)^{|n|}$ le sont.

Avec la Proposition 3.5.1 et le début de la preuve, on a alors $\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int} A_n \geq 0$.

$\Leftarrow$) D'après le début de la preuve, pour tous $0 \leq r < 1$, $t \in \mathbb{R}$, la somme de la série de l'énoncé, qui est auto-adjointe positive, est égale à $Re((I - re^{it}A)^{-1})$. La convergence absolue implique aussi que $r(A) \leq 1$. La Proposition 3.5.1 s'applique alors, et nous dit que $w(A) \leq 1$. □

Proposition 3.5.4. —
Soient $T_n, S_n \in \mathcal{L}(H)$, $n \in \mathbb{Z}$, tels que pour tous $0 \leq r < 1$, $t \in \mathbb{R}$, les séries $\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int} T_n$ et $\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int} S_n$ convergent absolument et ont une somme auto-adjointe positive.
Si de plus on a $T_n \cdot S_m = S_m \cdot T_n$, $\forall\, m, n \in \mathbb{Z}$, alors la série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int} T_n \cdot S_n$ est absolument convergente et de somme auto-adjointe positive, pour tous $0 \leq r < 1$, $t \in \mathbb{R}$.

Démonstration.
Soient $0 \leq r_0, r < 1$. Soient $t, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. Comme T_n et S_m commutent pour tous $n, m \in \mathbb{Z}$, les opérateurs $\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int_1} T_n$ et $\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int_2} S_n$ commutent entre eux.

Comme ces séries convergent absolument, leur produit est égal à $\sum_{n,m=-\infty}^{\infty} r^{|n|+|m|} e^{i(nt_1 + mt_2)} T_n \cdot S_m$

Or, le produit de deux opérateurs auto-adjoints positifs qui commutent est encore auto-adjoint positif.
Soit $x \in H$. Prenons $t_1 = t - t_2$. On a alors :
$0 \leq f(t_2) := \langle (\sum_{n,m} r^{|n|+|m|} e^{i(n(t-t_2)+mt_2)} T_n \cdot S_m) x, x \rangle$. Cette fonction f est de plus continue en t_2.

D'où : $0 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t_2) d_2 = \sum_{n,m} r^{|n|+|m|} e^{int} \langle T_n \cdot S_m x, x \rangle \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)t_2} dt_2$
Ainsi, $0 \leq \sum_n r^{|n|+|n|} e^{int} \langle T_n \cdot S_n x, x \rangle$, $\forall x \in H$.

En posant $r = \sqrt{r_0}$, on obtient $\sum_{n=-\infty}^{\infty} r_0^{|n|} e^{int} T_n \cdot S_n \geq 0$, ce qui conclut. □

Remarque 3.5.5. —
Voici une démonstration de la Proposition 3.3.8 :
Supposons que $w(A) \leq 1$. Définissons A_n comme dans le Théorème 3.5.3.
Fixons $k > 1$ et définissons $S_n := \left| \begin{array}{l} I \text{ si } k|n \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$
Le Théorème 3.5.3 appliqué à I, $r = r_1^k$,$t = kt_1$ permet de montrer que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} r_1^{|n|} e^{int_1} S_n$ converge absolument et est de somme auto-adjointe positive.
La Proposition 3.5.4 appliquée à $(A_n)_n$ et $(S_n)_n$ donne alors que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|nk|} e^{inkt} A_{nk}$ converge absolument et est de somme auto-adjointe positive.
Or, $A_{nk} = (A^k)_n$. En posant $r_1 = r^{\frac{1}{k}}$ et $t_1 = \frac{t}{k}$, on obtient $\sum_{n=-\infty}^{\infty} r_1^{|n|} e^{int_1} (A^k)_n \geq 0$.
Le Théorème 3.5.3 permet alors de conclure que $w(A^k) \leq 1$.

Proposition 3.5.6. —
Soient $A, B \in \mathcal{L}(H)$ qui double-commutent : $A \cdot B = B \cdot A$ et $A^* \cdot B = C \cdot A^*$.
Alors, on a : $w(A \cdot B) \leq w(A) \|B\|$.

Démonstration.
Comme B commute à A^*, on a aussi A qui commute à B^* en passant à l'adjoint.
Si $B = 0$ ou $A = 0$, l'inégalité est vraie. Supposons A et B non-nuls.
Quitte à considérer $\frac{1}{w(A)} A$ et $\frac{1}{\|B\|} B$, on peut supposer que $w(A) = \|B\| = 1$.
Montrons alors que $w(A \cdot B) \leq 1$.

Définissons $(A_n)_n$ comme en 3.5.3 et $(B(n))_n$ comme en 3.2.11.
La double-commutativité de A et B implique que A_n commute à $B(m)$ pour tous $m, n \in \mathbb{Z}$.
Les Propositions 3.5.3 et 3.2.11 nous disent alors que pour tous $0 \leq r < 1, t \in \mathbb{R}$,
les séries : $\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int} A_n$ et $\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int} B(n)$ convergent absolument vers des opérateurs auto-adjoints positifs.
La Proposition 3.5.4 nous dit alors qu'il en est de même pour $\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int} A_n B(n)$.
Or, on a $A_n B(n) = (A \cdot B)_n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, par définition de $(A \cdot B)_n$.
La Proposition 3.5.3 nous dit qu'alors $w(A \cdot B) \leq 1$, ce qui conclut. □

Remarque 3.5.7. —
Dans le contexte de la Proposition 3.5.6, on a aussi $w(A \cdot B) \leq \|A\| w(B)$ grâce à la symétrie de la double-commutativité.
Dans le cas où A est auto-adjoint positif, on retrouve la Proposition 3.2.15.
Mais l'hypothèse de double-commutativité seule n'est pas suffisante pour avoir la sous-multiplicativité du rayon numérique.

Théorème 3.5.8. *[10]*—
Soit $A \in \mathcal{L}(H)$.
On a $w(A) \leq 1$ si et seulement si il existe $\mathcal{K}$ un Hilbert contenant H et $U \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ unitaire tel que $A^n = 2.P_H \cdot U^n \cdot P_H$, $\forall n \geq 1$, avec P_H la projection orthogonale sur H.

Démonstration.
$\Rightarrow$) On a $r(A) \leq w(A) \leq 1$, donc pour tout $z \in \mathbb{D}$, $(I - zA)$ est inversible.
La fonction $F(z) := (I - zA)^{-1}$ est analytique en z sur $\mathbb{D}$ et vérifie $F(0) = I$ et $Re(F(z)) \geq 0$ d'après la Proposition 3.5.1.
D'après un Théorème de Riesz généralisé aux fonctions à valeurs dans des espaces d'opérateurs [13][Section 8, Thm.III, p.65-69], il existe un Hilbert $\mathcal{K}$ contenant H et et $U \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ unitaire tel que $F(z) = P_H(I_{\mathcal{K}} + zU)(I_{\mathcal{K}} - zU)^{-1} P_H$, $\forall z \in \mathbb{D}$.
Cela se réécrit en : $F(z) = P_H(2.(I_{\mathcal{K}} - zU)^{-1} - I_{\mathcal{K}})P_H$ En décomposant F en série entière, on obtient :
$\sum_{n\geq 0} (zA)^n = F(z) = P_H[I_{\mathcal{K}} + 2zU + 2(zU)^2 + ...]P_H = I_H + 2zP_H \cdot U \cdot P_H + 2z^2 P_H \cdot U^2 \cdot P_H + ...$
Comme F est analytique sur $\mathbb{D}$, l'identification des coefficients fournit $A^n = 2.P_H \cdot U^n \cdot P_H$, $\forall n \geq 1$.
$\Leftarrow$) Comme U est unitaire, $r(U) = 1$, donc la série entière $\sum_{n\geq 0} 2(zU)^n$ est absolument convergente pour $z \in \mathbb{D}$, de somme égale à $2.(I_{\mathcal{K}} - zU)^{-1} - I_{\mathcal{K}} = (I_{\mathcal{K}} + zU)(I_{\mathcal{K}} - zU)^{-1}$.
Comme $A^n = 2.P_H \cdot U^n \cdot P_H$, $\forall n \geq 1$, la série entière $\sum_{n\geq 0} (zA)^n$ converge elle aussi absolument pour tout $z \in \mathbb{D}$. Sa somme est alors égale à $(I - zA)^{-1}$.
Comme $\|U\| \leq 1$, le Lemme 3.2.10 nous dit que $Re((I_{\mathcal{K}} + zU)(I_{\mathcal{K}} - zU)^{-1}) \geq 0$.
Donc, $Re(P_H(I_{\mathcal{K}} + zU)(I_{\mathcal{K}} - zU)^{-1} P_H) \geq 0$ car P_H est auto-adjoint.
Ainsi, $Re((I - zA)^{-1}) \geq 0$, pour tout $z \in \mathbb{D}$.
La Proposition 3.5.1 donne alors $w(A) \leq 1$. □

Théorème 3.5.9. *[7]*—
Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ tel que $w(A) \leq 1$.
Posons $\mathbb{A}_0(\mathbb{D}) := \{f \in C^0(\overline{\mathbb{D}}) \cap Hol(\mathbb{D}) \text{ tq } f(0) = 0\}$, muni de la norme $\|.\|_\infty$.
Alors il existe un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres $\Phi_A : \begin{array}{ccc} \mathbb{A}_0(\mathbb{D}) & \to & \mathcal{L}(H) \\ f & \mapsto & \Phi_A(f) =: f(A) \end{array}$
tel que : $\Phi_A(x \mapsto x) = A$ et $\|f(A)\| \leq 2\|f\|_\infty$.
De plus, pour $\mathcal{K}$ un Hilbert contenant H et $U \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ unitaire tel que $A^n = 2.P_H \cdot U^n \cdot P_H$, $\forall n \geq 1$, on a $f(A) = 2P_H \cdot f(U) \cdot P_H = \lim_{r\to 1^-} f(rA)$.

Démonstration.
L'ensemble des fonction f de $C^0(\overline{\mathbb{D}}) \cap Hol(\mathbb{D})$ telles que $f(0) = 0$ est une sous-algèbre de Banach de $C^0(\overline{\mathbb{D}}) \cap Hol(\mathbb{D})$ car l'application $g \mapsto g(0)$ est continue, de norme 1, sur $C^0(\overline{\mathbb{D}}) \cap Hol(\mathbb{D})$.

De plus, la preuve du Lemme 2.2.3 permet de montrer que les fonctions polynômiales dont le coefficient constant est nul sont denses dans $\mathbb{A}_0(\mathbb{D})$ pour la norme $\|.\|_\infty$.
Appliquons le Théorème 3.5.8 pour avoir $\mathcal{K}$ un Hilbert contenant H et $U \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ unitaire tel que $A^n = 2.P_H \cdot U^n \cdot P_H, \forall n \geq 1$.
Ainsi, pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(0) = 0$, on a $P(A) = 2P_H \cdot P(U) \cdot P_H$.

Toutes ces précisions faites, les raisonnements de la preuve peuvent alors être identiques à ceux de la preuve du Théorème 2.2.2.
Les seules différences sont que le Théorème 3.5.8 a remplaçé le Théorème 2.1.1 de dilatation de Nagy, que l'on a rajouté la condition $f(0) = 0$, et qu'il y a un facteur 2 qui rentre en jeu entre $f(A)$ et $P_H \cdot f(U) \cdot P_H$.
On trouve de même $\Phi_A(x \mapsto x) = A$ et $\|f(A)\| \leq 2\|f(U)\| \leq 2\|f\|_\infty$.
Enfin, le Lemme 2.2.3 nous dit que pour $f \in \mathbb{A}_0(\mathbb{D})$ et pour $0 \leq r < 1$, en posant $f_r(z) = f(rz)$, on a $f_r \in \mathbb{A}_0(\mathbb{D})$ et $f_r \to_{r\to 1^-} f$. Comme Φ_A est un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres continu, cela entraîne : $f(rA) = f_r(A) \to_{r\to 1^-} f(A)$. □

Corollaire 3.5.10. —
Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ tel que $w(A) \leq 1$.
Soit $f \in C^0(\overline{\mathbb{D}}) \cap Hol(\mathbb{D})$.
Alors, $f(A) := \lim\limits_{r\to 1^-} f(rA)$ existe.
Cela prolonge le morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres du Théorème 3.5.9 à $C^0(\overline{\mathbb{D}}) \cap Hol(\mathbb{D})$.
De plus, pour $\mathcal{K}$ un Hilbert contenant H et $U \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ unitaire tel que $A^n = 2.P_H \cdot U^n \cdot P_H, \forall n \geq 1$, on a $f(A) + f(0).I = 2P_H \cdot f(U) \cdot P_H$.

Démonstration.
Appliquons le Théorème 3.5.8 pour avoir $\mathcal{K}$ un Hilbert contenant H et $U \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ unitaire tel que $A^n = 2.P_H \cdot U^n \cdot P_H$, pour tout $n \geq 1$.
Soit $f(z) = \sum_n a_n z^n$ la décomposition en série entière de f, de rayon de CV supérieur ou égal à 1.
Comme $\|A^n\| \leq 2w(A^n) \leq 2w(A)^n \leq 2$, la série $\sum_n a_n(rA)^n$ est absolument convergente $\forall\, 0 \leq r < 1$.
Cela permet ainsi de définir $f(rA)$. Comme $\|U^n\| = 1$, on peut de même définir $f(rU)$.
On a alors : $f(rA) - f(0).I = \sum\limits_{n\geq 1} a_n(rA)^n = \sum\limits_{n\geq 1} a_n.2.r^n.P_H \cdot U^n \cdot P_H$
$\Rightarrow f(rA) - f(0).I = 2P_H(\sum\limits_{n\geq 1} a_n(rU)^n)P_H = 2P_H \cdot (f(rU) - f(0).I) \cdot P_H$.
Donc, $f(rA) + f(0).I = 2.P_H \cdot f(rU) \cdot P_H$.
Comme $\|U\| = 1$, le Théorème 2.2.2 appliqué à U nous dit que $g \mapsto g(U)$ sur $\mathbb{C}^0(\overline{\mathbb{D}}) \cap Hol(\mathbb{D})$ est continue. Etant donné que f est uniformément continue sur $\overline{\mathbb{D}}$, $f_r(z) = f(rz)$ converge uniformément vers f pour $r \to 1^-$.
La continuité de $g \mapsto g(U)$ implique alors que $f(rU)$ converge vers $f(U)$ pour $r \to 1^-$.
Donc, $f(rA)$ est convergente pour $r \to 1^-$, et on note $f(A)$ cette limite.
On en déduit alors que $f(A) + f(0).I = 2P_H \cdot f(U) \cdot P_H$ □

Théorème 3.5.11. *Théorème de Berger-Stampfli-Kato[7][17][12] —*
Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ tel que $w(A) \leq 1$.
Soit $f \in C^0(\overline{\mathbb{D}}) \cap Hol(\mathbb{D})$ telle que $f(0) = 0$.
Alors, on a $w(f(A)) \leq \|f\|_\infty$.

Démonstration.
Appliquons le Théorème 3.5.8 pour avoir $\mathcal{K}$ un Hilbert contenant H et $U \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ unitaire tel que $A^n = 2.P_H \cdot U^n \cdot P_H$, pour tout $n \geq 1$.
Si f est nulle, alors $f(A) = 0 = \|f\|_\infty$. Sinon, posons $g := \frac{1}{\|f\|_\infty} f$.
D'après le Théorème 3.5.9, on a alors $g(A) = 2P_H \cdot g(U) \cdot P_H$.
Comme $\|g\|_\infty = 1$ et comme $\|U\| = 1$, on a $\|g(U)\| \leq 1$.
En appliquant le Théorème 2.1.1 de dilatation de Nagy, on a $\mathcal{M}$ un Hilbert contenant $\mathcal{K}$ et $V \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$ unitaire tel que $g(U)^n = P_\mathcal{K} \cdot V^n \cdot P_\mathcal{K}, \forall n \geq 1$.

Ainsi, on a $g(A)^n = 2.P_H \cdot V^n \cdot P_H$, pour tout $n \geq 1$.
Le Théorème 3.5.8 nous dit alors que $w(g(A)) \leq 1$.
On trouve ainsi $w(f(A)) \leq \|f\|_\infty$. □

Corollaire 3.5.12. —
Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ tel que $w(A) \leq 1$.
Alors $w(A^n) \leq 1$, pour tout $n \geq 1$.

Démonstration.
On applique le Théorème 3.5.11 à $f(z) = z^n$ pour obtenir le résultat. □

Corollaire 3.5.13. —
Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ tel que $w(A) \leq 1$.
Soit $f \in C^0(\overline{\mathbb{D}}) \cap Hol(\mathbb{D})$ telle que $\|f\|_\infty \leq 1$.
Alors, on a $w(f(A)) \leq 1 + 2|f(0)|$.

Démonstration.
Posons $g(z) = (f(z) - f(0))(1 + |f(0)|)^{-1}$.
Alors g est dans $C^0(\overline{\mathbb{D}}) \cap Hol(\mathbb{D})$, $g(0) = 0$, et $\|g\|_\infty \leq 1$.
Le Théorème 3.5.11 nous dit alors que $w(g(A)) \leq 1$.
Ainsi, $w(f(A) - f(0).I) \leq 1 + |f(0)|$.
D'où, $w(f(A)) \leq 1 + 2|f(0)|$ par inégalité triangulaire. □

Théorème 3.5.14. *Théorème de Kato[7][17]* —
Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ tel que $w(A) \leq 1$.
Soit $f \in C^0(\overline{\mathbb{D}}) \cap Hol(\mathbb{D})$ telle que $Re(f(z)) \geq 0$.
Alors, on a $W(f(A)) \subset Re_{\geq -Re(f(0))}$, c'est-à-dire $Re(f(A)) \geq -Re(f(0)).I$.

Démonstration.
Appliquons le Théorème 3.5.8 pour avoir $\mathcal{K}$ un Hilbert contenant H et $U \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ unitaire tel que $A^n = 2.P_H \cdot U^n \cdot P_H$, pour tout $n \geq 1$.
D'après le Corollaire 3.5.10, on a $f(A) = 2P_H \cdot f(U) \cdot P_H - f(0).I$.
Or, U est unitaire, donc normal.
Ainsi, $\overline{W(f(U)} = Conv(\sigma(f(U)) = Conv(f(\overline{\sigma(U)})$ d'après la Proposition 3.2.3.
Comme on a $f(\overline{\mathbb{D}}) \subset Re_{\geq 0}$, on trouve alors que $\overline{W(f(U)} \subset Re_{\geq 0}$, donc que $Re(f(U)) \geq 0$.
On en déduit que $Re(f(A)) \geq -Re(f(0)).I$, ce qui permet de conclure car alors $Re(\langle f(A)x, x\rangle) = \langle R(f(A))x, x\rangle \geq -Re(f(0))\|x\|^2$. □

Remarque 3.5.15. —
Le terme $-Re(f(0))$ du Théorème 3.5.17 ne peut pas être amélioré.
De même, la condition $f(0) = 0$ du Théorème 3.5.11 ne peut pas être levée. Un théorème dû à Drury[12] montre que si on enlève cette condition, alors on peut améliorer le Corollaire 3.5.13 ($\|f\|_\infty \leq 1$ et $w(A) \leq 1$) avec $w(f(A)) \leq 1 + |f(0)| - |f(0)|^2 \leq \frac{5}{4}$.
L'article [12] de KLAJA, MASHREGHI, et RANSFORD propose aussi une preuve directe et élémentaire du Théorème 3.5.11, duquel découlent les théorèmes de Kato.
Dans son article [17], KATO Tosio utilise uniquement des résultats de calcul fonctionnel analytique dans ses preuves. Ainsi, la version des Théorèmes 3.5.11 et 3.5.11 de son article est valable en premier lieu pour des fonctions holomorphes sur un voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$.
Le Lemme 2.2.3 et la Proposition 3.2.1 permettent toutefois de montrer que le résultat peut s'étendre par densité à l'algèbre du disque unité.

Théorème 3.5.16. *Théorème de Kato[17]* —
Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ tel que $W(A) \subset Re_{\geq 0}$.
Soit f holomorphe sur un voisinage de $Re_{\geq 0}$.
Alors, on a $W(f(A)) \subset Conv(f(Re_{\geq 0}))$.

Démonstration.
Ici, $f(A)$ est bien défini via le théorème du calcul fonctionnel analytique. Comme $W(A) \subset Re_{\geq 0}$, on a $-1 \notin \sigma(A)$. Posons $B := (A - I)(A + I)^{-1}$. La Proposition 3.2.9 nous dit qu'alors $\|B\| \leq 1$.
Posons $g(z) = f(\frac{1+z}{1-z})$, pour $z \in \overline{\mathbb{D}} - \{1\}$. La fonction g est alors holomorphe sur $\mathbb{D}$, avec $f(Re_{\geq 0}) = g(\overline{\mathbb{D}} - \{1\})$, mais n'est pas forcément prolongeable continûment à $\overline{\mathbb{D}}$.
Posons alors $g_r(z) := g(rz)$, pour $0 \leq r < 1$. Les fonctions g_r sont alors dans $C^0(\overline{\mathbb{D}}) \cap Hol(\mathbb{D})$.
L'opérateur $g_r(B)$ a donc un sens.
On a formellement : $g_r(B) = f([(1 - r).I + (1 + r).A][(1 + r).I + (1 - r).A]^{-1})$.
Pour $A_r := [(1 - r).I + (1 + r).A][(1 + r).I + (1 - r).A]^{-1}$, A_r converge vers A quand $r \to 1^-$.
Pour U un voisinage de $Re_{\geq 0}$ sur lequel f est holomorphe, U est un voisinage de $\overline{W(A)}$ car $\overline{W(A)} \subset Re_{\geq 0}$, donc on a un $\rho < 1$ tel que pour tout $\rho < r < 1$, $\overline{W(A_r)} \subset U$.
L'expression formelle est donc valide pour $\rho < r < 1$, donc $g_r(B) = f(A_r)$ CV vers $f(A)$ pour $r \to 1^-$.
Montrons que $W(g_r(B)) \subset Conv(g(\overline{\mathbb{D}} - \{1\}))$.
Pour cela, montrons que tout demi-plan fermé P contenant $Conv(g(\overline{\mathbb{D}}-\{1\}))$ contient aussi $W(g_r(B))$.
Soit $p \in \overset{\circ}{P}$, et p' le symétrique de p par rapport à ∂P.
La Proposition 3.2.9 nous dit que $W(g_r(B)) \subset P$ si et seulement si $\|(g_r(B)-p.I)(g_r(B)-p'.I)^{-1}\| \leq 1$.
Or, pour tout $z \in \overline{\mathbb{D}}$, $g_r(z) = g(rz) \in g(\overline{\mathbb{D}} - \{1\}) \subset P$. Donc, $(g_r(z) - p)(g_r(z) - p')^{-1} \in \overline{\mathbb{D}}$.
Comme on a aussi $\|B\| \leq 1$, le Théorème 2.2.2 nous permet d'en déduire que $\|(g_r(B) - p.I)(g_r(B) - p'.I)^{-1}\| \leq 1$, donc que $W(g_r(B)) \subset P$.
On obtient alors : $W(f(A_r)) = W(g_r(B)) \subset Conv(g(\overline{\mathbb{D}} - \{1\})) = Conv(f(Re_{\geq 0}))$.
La Proposition 3.2.1 permet ainsi de conclure que $W(f(A)) \subset Conv(f(Re_{\geq 0}))$. □

Théorème 3.5.17. —
Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ tel que $w(A) \leq 1$.
S'il existe $x \in H$ tel que $\|A^n x\| = 2\|x\|$ pour un $n \geq 1$, alors $A^{n+1}x = 0$.

Démonstration.
Appliquons le Théorème 3.5.8 pour avoir $\mathcal{K}$ un Hilbert contenant H et $U \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ unitaire tel que $A^n = 2.P_H \cdot U^n \cdot P_H$, pour tout $n \geq 1$.
On a ainsi : $2\|x\| = \|A^n x\| = \|2P_H \cdot U^n \cdot P_H x\| = 2\|P_H \cdot U^n x\|$
Comme $\|U^n x\| = \|x\|$ et comme P_H est une projection, on a alors $P_H \cdot U^n x = U^n x$, donc $A^n x = 2U^n x$.
Par conséquent, $A^{n+1}x = A \cdot (2U^n)x = 2P_H \cdot U \cdot P_H \cdot (2U^n)x = 4P_H \cdot U^{n+1}x$.
Or, on a aussi $A^{n+1}x = 2P_H \cdot U^{n+1}x$ car $x \in H$.
On en déduit donc que $A^{n+1}x = 0$. □

Références :
[10] GUSTAFSON Karl E., RAO Duggirala K.M., *Numerical Range. The Field of Values of Linear Operators and Matrices*; Ch.1-2.
[9] DONOGHUE Jr. William F., *On the numerical range of a bounded operator*; p.261-263.
[15] SHIU Elias S.W., *Growth of numerical ranges of powers of Hilbert space operators*; p.155-160.
[5] HOLBROOK John A.R., *Multiplicative properties of the numerical radius in operator theory*; p.166-174.
[7] BERGER C.A, STAMPLFI J.G, *Mapping theorems for the numerical range*; p.1047-1055.
[11] BERBERIAN Sterling K., *Approximate proper vectors*; p.111-114.
[17] KATO Tosio, *Some mapping theorems for the numerical range*; p.652-655.
[12] KLAJA Hubert, MASHREGHI Javad, RANSFORD Thomas, *On mapping theorems for numerical range*; p.3009-3018.

4 Opérateurs de classe C_ρ

4.1 Classe C_ρ, rayon w_ρ, liens avec $\|T\|$ et $w(T)$

Definition 4.1.1. —
Soit $\rho > 0$. On définit la **classe** $C_\rho(H)$ comme l'ensemble des opérateurs $A \in \mathcal{L}(H)$ tels qu'il existe un Hilbert $\mathcal{K}$ contenant H et $U \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ unitaire tel que $A^n = \rho.P_H \cdot U^n \cdot P_H$, $\forall n \geq 1$, avec P_H la projection orthogonale sur H.

Remarque 4.1.2. —
La classe $C_1(H)$ est l'ensemble des A tels que $\|A\| \leq 1$, d'après le Théorème 2.1.2.
La classe $C_2(H)$ est l'ensemble des A tels que $w(A) \leq 1$, d'après le Théorème 3.5.8.
Une première caractérisation des opérateurs de classe $C_\rho(H)$ sera établie, et de cette caractérisation découleront un certain nombre de résultats plus maniables, notamment la définition du rayon d'opérateur $w_\rho(.)$ qui généralisera les cas $\rho = 1$ et $\rho = 2$.

Théorème 4.1.3. *[16]*—
Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, et $\rho > 0$. L'opérateur A est dans la classe $C_\rho(H)$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :
(I_ρ) $Re(\langle (I - zA)x, x\rangle) \geq (1 - \frac{\rho}{2})\|(I - zA)x\|^2$, pour tous $x \in H, z \in \mathbb{D}$.
(II) $\sigma(A) \subset \overline{\mathbb{D}}$
De plus, si $\rho \leq 2$, alors la condition (II) est redondante.

Démonstration.
Supposons $A \in C_\rho(H)$.
Soit $\mathcal{K}$ un Hilbert contenant H et $U \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ unitaire tel que $A^n = \rho.P_H \cdot U^n \cdot P_H$, pour tout $n \geq 1$.
Comme $\|U\| = 1$, pour tout $z \in \mathbb{D}$, la série $I_\mathcal{K} + 2z.U + ... + 2z^n.U^n + ...$ est absolument convergente, et sa somme vaut $2.(I_\mathcal{K} - zU)^{-1} - I_\mathcal{K} = (I_\mathcal{K} + zU)(I_\mathcal{K} - zU)^{-1}$.
Or, on a $2.P_H \cdot U^n \cdot P_H = \frac{2}{\rho}A^n$, pour tout $n \geq 1$.
Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{D}$, la série $I_H + \frac{2}{\rho}z.A + ... + \frac{2}{\rho}z^n.A^n + ...$ est absolument convergente, car égale à la série $I_H + 2z._H \cdot U \cdot P_H + ... + 2z^n.P_H \cdot U^n \cdot P_H + ...$.
La série $\sum_{n\geq 0}(zA)^n$ est ainsi absolument convergente, donc $(I - zA)$ est inversible $\forall\, z \in \mathbb{D}$.
Donc $\sigma(A) \subset \overline{\mathbb{D}}$ car $(\gamma.I - A)$ est inversible $\forall |\gamma| > 1$. La condition (II) est vérifiée.
On a alors : $\frac{2}{\rho}(I_H - zA)^{-1} + (1 - \frac{2}{\rho}).I_H = I_H + \frac{2}{\rho}z.A + ... + \frac{2}{\rho}z^n.A^n + ... = P_H \cdot (I_\mathcal{K} + zU)(I_\mathcal{K} - zU)^{-1} \cdot P_H$.
Comme $\|U\| \leq 1$, la Proposition 3.2.10 nous dit que $Re((I_\mathcal{K} + zU)(I_\mathcal{K} - zU)^{-1}) \geq 0$,
d'où $Re(P_H \cdot (I_\mathcal{K} + zU)(I_\mathcal{K} - zU)^{-1} \cdot P_H) \geq 0$ car P_H est auto-adjoint,
d'où $Re(\frac{2}{\rho}(I_H - zA)^{-1} + (1 - \frac{2}{\rho}).I_H) \geq 0$.
Soit $x \in H$. Posons $y = (I - zA)x$. On a :
$Re(\langle [(1 - \frac{2}{\rho}).I_H + \frac{2}{\rho}(I_H - zA)^{-1}]y, y\rangle) \geq 0$
$\Rightarrow (1 - \frac{2}{\rho})\|y\|^2 + \frac{2}{\rho}Re(\langle (I_H - zA)^{-1}y, y\rangle) \geq 0$
$\Rightarrow (1 - \frac{2}{\rho})\|(I - zA)x\|^2 + \frac{2}{\rho}Re(\langle (x, (I - zA)x\rangle) \geq 0$
$\Rightarrow \frac{2}{\rho}Re(\langle (I - zA)x, x\rangle) \geq (\frac{2}{\rho} - 1)\|(I - zA)x\|^2$
$\Rightarrow Re(\langle (I - zA)x, x\rangle) \geq (1 - \frac{\rho}{2})\|(I - zA)x\|^2$
Cela étant vrai pour tous $x \in H$,$z \in \mathbb{D}$, la condition (I_ρ) est vérifiée.

Réciproquement, supposons que (I_ρ) et (II) sont vrais.
Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{D}$, $(I - zA)$ est inversible.
En remontant les calculs précédents, on trouve alors que pour $F(z) := \frac{2}{\rho}(I_H - zA)^{-1} + (1 - \frac{2}{\rho}).I_H$, on a $Re(F(z)) \geq 0$. La fonction F est ainsi analytique sur $\mathbb{D}$, avec $F(0) = I$ et $Re(F(z)) \geq 0$.
D'après un Théorème de Riesz généralisé aux fonctions à valeurs dans des espaces d'opérateurs [13][Section 8, Thm.III, p.65-69], il existe un Hilbert $\mathcal{K}$ contenant H et et $U \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ unitaire
tel que $F(z) = P_H(I_\mathcal{K} + zU)(I_\mathcal{K} - zU)^{-1}P_H$, $\forall z \in \mathbb{D}$.
Cela se réécrit en : $F(z) = P_H(2.(I_\mathcal{K} - zU)^{-1} - I_\mathcal{K})P_H$.
En décomposant F en série entière de deux façons, on obtient :

$I_H + \frac{2}{\rho}z.A + ... + \frac{2}{\rho}z^n.A^n + ... = F(z) = P_H[I_{\mathcal{K}} + 2z.U + 2z^2.U^2 + ...]P_H$
$\Rightarrow I_H + \frac{2}{\rho}z.A + ... + \frac{2}{\rho}z^n.A^n + ... = I_H + 2zP_H \cdot U \cdot P_H + 2z^2P_H \cdot U^2 \cdot P_H + ...$
Comme F est analytique sur $\mathbb{D}$, l'identification des coefficients fournit $A^n = \rho.P_H \cdot U^n \cdot P_H, \forall n \geq 1$.

Supposons maintenant que $\rho \leq 2$. On a alors $1 - \frac{\rho}{2} \geq 0$.
La condition (I_ρ) nous dit alors que $Re((I - zA)x, x) \geq 0, \forall\, x \in H, \forall\, z \in \mathbb{D}$.
Tout comme dans la preuve $iii) \Rightarrow ii)$ de la Proposition 3.5.1, on peut étendre ce résultat par densité et par continuité à tout $z \in \overline{\mathbb{D}}$.
La Proposition 3.5.1 apporte alors : $r(A) \leq w(A) \leq 1$, ce qui conclut. □

Remarque 4.1.4. —
Dans le cas $\rho = 1$, on trouve $\|x\|^2 \geq \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}|z|\|Ax\|^2$ en développant les deux termes, ce qui implique que $\|A\| \leq 1$ en faisant tendre z vers 1 et en prenant $\|x\| = 1$.
Dans le cas $\rho = 2$, on trouve $Re((I - zA)) \geq 0$, pour tout $z \in \mathbb{D}$, ce qui s'étend par continuité et densité à $\overline{\mathbb{D}}$. La Proposition 3.5.1 implique alors que $w(A) \leq 1$.
Il a été montré[8][Prop. 8.3] que la condition (II) est en réalité toujours redondante.

Corollaire 4.1.5. —
Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, et $\rho > 0$. L'opérateur A est dans la classe $C_\rho(H)$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :
$(\tilde{I}_\rho)$ $Re(\frac{2}{\rho}(I - zA)^{-1} + (1 - \frac{2}{\rho}).I_H) \geq 0$, pour tout $z \in \mathbb{D}$.
(II) $r(A) \leq 1$.

Démonstration.
La condition (II) implique que $(I - zA)$ est inversible pour tout $z \in \mathbb{D}$. Les calculs effectués dans la preuve du Théorème 4.1.3 montrent que lorsque la condition (II) est vraie, les conditions (I_ρ) et $(\tilde{I}_\rho)$ sont équivalentes, ce qui conclut. □

Théorème 4.1.6. *[4]*—
Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, et $\rho > 0$. Alors on a :
$A \in C_\rho(H) \Leftrightarrow \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{int}A_\rho(n)$ converge absolument et est auto-adjoint positif, $\forall\, 0 \leq r < 1, \forall\, t \in \mathbb{R}$,

avec $A_\rho(n) := \left| \begin{array}{l} \frac{1}{\rho}A^n \text{ si } n > 0 \\ I \text{ si } n = 0 \\ \frac{1}{\rho}(A^*)^{|n|} \text{ si } n < 0 \end{array} \right.$

Démonstration.
- Montrons que si la série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{int}A_\rho(n)$ converge absolument, alors $(I - re^{it}A)$ est inversible et la somme de la série vaut $Re(\frac{2}{\rho}(I - re^{it}A)^{-1} + (1 - \frac{2}{\rho}).I)$.
La convergence absolue de cette série entraîne la convergence absolue de la série $\sum\limits_{n\geq 0} r^n e^{int}A^n$, par définition de $A_\rho(n)$. Or, si la série $\sum_{n\geq 0} r^n e^{int}A^n$ converge absolument, alors $(I - re^{it}A)$ est inversible et la somme de la série vaut $(I - re^{it}A)^{-1}$.
On a alors : $Re(\frac{2}{\rho}(I - re^{it}A)^{-1} + (1 - \frac{2}{\rho}).I) = \frac{1}{2}I + \sum\limits_{n>0} \frac{1}{2}r^n e^{int}\frac{2}{\rho}.A^n + \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}\sum\limits_{n<0} r^{|n|}e^{int}\frac{2}{\rho}.(A^*)^{|n|}$
D'où : $Re(\frac{2}{\rho}(I - re^{it}A)^{-1} + (1 - \frac{2}{\rho}).I) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{int}A_\rho(n)$.
$\Rightarrow$) D'après le Théorème 4.1.3, on a $r(A) \leq 1$, donc la série entière $\sum_{n\geq 0} r^n e^{int}A^n$ est absolument convergente pour tous $0 \leq r < 1, t \in \mathbb{R}$, donc la série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{int}A_\rho(n)$ est absolument convergente par définition de $A_\rho(n)$.
En remontant les calculs effectués dans la preuve du Théorème 4.1.3, la condition (I_ρ) implique que $Re(\frac{2}{\rho}(I - re^{it}.A)^{-1} + (1 - \frac{2}{\rho}).I) \geq 0$, ce qui conclut d'après les calculs précédents.
$\Leftarrow$) Avec les calculs précédents, on a $r(A) \leq 1$ car $(I - re^{it}A)$ est inversible pour tous $0 \leq r < 1, t \in \mathbb{R}$, et $Re(\frac{2}{\rho}(I - re^{it}A)^{-1} + (1 - \frac{2}{\rho}).I \geq 0$. La condition (II) est donc vérifiée.

Les calculs effectués dans la preuve de la première implication du Théorème 4.1.3 montrent que cela implique (I_ρ), d'où $A \in C_\rho(H)$. □

Definition 4.1.7. —
Soit $\rho > 0$. On définit le **rayon d'opérateur** ("operator radius") w_ρ comme fonction sur $\mathcal{L}(H)$ par : $w_\rho(A) := \inf\{u \text{ tq } u > 0 \text{ et } \frac{1}{u}A \in C_\rho(H)\}$.

Théorème 4.1.8. *[4]*—
Soit $\rho > 0$. Le rayon d'opérateur $w_\rho(.)$ vérifie les propriétés suivantes :
$i)$ $w_\rho(A) < +\infty$
$ii)$ $w_\rho(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0$. On a $w_\rho(A) \geq \frac{1}{\rho}\|A\|$.
$iii)$ $w_\rho(zA) = |z| w_\rho(A)$.
$iv)$ $w_\rho(A) \leq 1 \Leftrightarrow A \in C_\rho(H)$.

Démonstration.
$i)$ Soit $\alpha > 0$ tel que $\alpha.\|A\| < 1$.
Alors, pour tous $0 \leq r < 1, t \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n\geq 0} r^n e^{int}(\alpha.A)^n$ est absolument convergente, donc la série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int}(\alpha.A)_\rho(n)$ est absolument convergente au vu de la définition de $(\alpha.A)_\rho(n)$.
D'après les calculs faits dans la preuve du Théorème 4.1.6, la somme de cette seconde série est égale à : $I - \frac{2}{\rho} Re(\sum_{n\geq 1} r^n e^{int}(\alpha.A)^n)$.
Or, pour $B \in \mathcal{L}(H)$, on a $\|Re(B)\| = \frac{\|B+B^*\|}{2} \leq \|B\|$, donc $Re(B) \leq \|B\|.I$.
On a donc : $I - \frac{2}{\rho} Re(\sum_{n\geq 1} r^n e^{int}(\alpha.A)^n) \geq (1 - \frac{2}{\rho}\| \sum_{n\geq 1} r^n e^{int}(\alpha.A)^n\|).I \geq (1 - \frac{2}{\rho}\sum_{n\geq 1} 1.(\alpha.\|A\|)^n\|).I$.
Pour $\alpha.\|A\|$ assez petit, on a alors $1 - \frac{2}{\rho}\sum_{n\geq 1}(\alpha.\|A\|)^n\|) \leq 0$.
Ceci implique alors $\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int}(\alpha.A)_\rho(n) \geq 0$, d'où $\alpha.A \in C_\rho(H)$, d'où $w_\rho(A) \leq \frac{1}{\alpha} < \infty$.

$ii)$ Soit $0 < u < \frac{1}{\rho}\|A\|$. On a alors $\|\frac{1}{u}A\| > \rho$.
On ne peut donc pas avoir $\frac{1}{u}A = \rho.P_H \cdot U \cdot P_H$ pour U unitaire.
Donc, $w_\rho(A) \geq \frac{1}{\rho}\|A\|$.
Si $B = 0$, on a par $i)$ un $\alpha > 0$ tel que $0 = \alpha.B \in C_\rho(H)$. Donc, $\frac{1}{u}.B \in C_\rho(H)\ \forall\, u > 0$, donc $w_\rho(0) = 0$.
On a donc bien $w_\rho(A) = 0$ si et seulement si $A = 0$.

$iii)$ Soit $z \in \mathbb{C}$. Ecrivons $z = r.e^{it}$, $r \geq 0, t \in \mathbb{R}$.
Si $r = 0$, on a $w_\rho(zA) = 0 = 0.w_\rho(A)$. Supposons maintenant $r > 0$.
Soit $u > 0$. Si l'on a $(\frac{1}{u}r.A)^n = \rho.P_H \cdot U^n \cdot P_H$ avec U unitaire, alors $(\frac{1}{u}r.e^{it}A)^n = \rho.P_H \cdot (e^{it}U)^n \cdot P_H$ et $V = e^{it}U$ est encore unitaire.
On en déduit que $\frac{1}{u}r.A \in C_\rho(H) \Leftrightarrow \frac{1}{u}r.e^{it}A \in C_\rho(H)$.
On a alors : $|z|w_\rho(A) = r(\inf\{u \text{ tq } u > 0 \text{ et } \frac{1}{u}A \in C_\rho(H)\}) = \inf\{ru \text{ tq } u > 0 \text{ et } \frac{1}{ru}rA \in C_\rho(H)\}$
$|z|w_\rho(A) = \inf\{ru \text{ tq } u > 0 \text{ et } \frac{1}{ru}re^{it}A \in C_\rho(H)\} = \inf\{v \text{ tq } v > 0 \text{ et } \frac{1}{v}zA \in C_\rho(H)\} = w_\rho(zA)$.

$iv)$ Montrons d'abord que pour $A \in C_\rho(H)$ et $z \in \overline{\mathbb{D}}$, on a $zA \in C_\rho(H)$.
Si $z = 0$, on a $zA = 0 \in C_\rho(H)$ d'après la preuve du point $ii)$. Supposons maintenant $z \neq 0$.
Soit $\mathcal{K}$ un Hilbert contenant H et $U \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ unitaire tel que $A^n = \rho.P_H \cdot U^n \cdot P_H$, pour tout $n \geq 1$.
On a alors $(zA)^n = \rho.P_H \cdot (zU)^n \cdot P_H$, avec $\|zU\| = |z|\|U\| \leq 1$.
D'après le Théorème 2.1.2 de dilatation de Nagy, on a alors $\mathcal{M}$ un Hilbert contenant $\mathcal{K}$ et $V \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$ unitaire tel que $(zU)^n = P_\mathcal{K} \cdot V^n \cdot P_\mathcal{K}$, pour tout $n \geq 1$.
On a alors $(zA)^n = \rho.P_H \cdot V^n \cdot P_H$ pour tout $n \geq 1$, donc $zA \in C_\rho(H)$.

Montrons que pour $w_\rho(A) \neq 0$, on a $\frac{1}{w_\rho}A \in C_\rho(H)$.

Par définition de $w_\rho(A)$, on a $(u_n)_n$ qui converge vers $w_\rho(A)$ en décroissant, telle que $\frac{1}{u_n}A \in C_\rho(A)$.
La condition (II) du Théorème 4.1.3 nous donne alors $r(\frac{1}{u_n}A) = \frac{1}{u_n}r(A) \leq 1$, donc $\frac{1}{w_\rho(A)}r(A) \leq 1$.
La condition (II) est donc vérifiée pour $\frac{1}{w_\rho(A)}A$.
La condition (I_ρ) du même Théorème nous donne $Re(\langle (I - z\frac{1}{u_n}.A)x, x\rangle) \geq (1 - \frac{\rho}{2})\|(I - z\frac{1}{u_n}A)x\|^2$,

pour tous $x \in H, z \in \mathbb{D}$.
En passant à la limite par continuité de la norme et du produit scalaire,
on obtient $Re(\langle (I - z\frac{1}{w_\rho(A)}A)x, x\rangle) \geq (1 - \frac{\rho}{2})\|(I - z\frac{1}{w_\rho(A)}A)x\|^2$.
On peut alors appliquer le Théorème 4.1.3 pour obtenir que $\frac{1}{w_\rho(A)}.A \in C_\rho(A)$.

$\Rightarrow$) Si $w_\rho(A) = 0$, alors $A = 0$ et $0 \in C_\rho(H)$.
Si $0 < w_\rho(A) \leq 1$, alors $\frac{1}{w_\rho(A)}A \in C_\rho(H)$, donc $A = w_\rho(A)\frac{1}{w_\rho(A)}A \in C_\rho(H)$ car $w_\rho(A) \leq 1$.
$\Leftarrow$) Si $A \in C_\rho(H)$, on a $w_\rho(A) \leq 1$ par définition de $w_\rho(A)$. □

Remarque 4.1.9. —
Les Théorèmes 2.1.2,3.5.8 et 4.1.8 impliquent alors que $w_1(A) = \|A\|$ et $w_2(A) = w(A)$.
On dispose ainsi de plusieurs conditions permettant de montrer que $w_\rho(A) \leq 1$, et les similarités avec des conditions montrant que $w(A) \leq 1$ ou $\|A\| \leq 1$ permettront d'obtenir des résultats similaires, bien que parfois différents.

Proposition 4.1.10. —
Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ et $\rho > 0$.
Alors $w_\rho(A^n) \leq w_\rho(A)^n$, $\forall\, n \geq 0$.

Démonstration.
D'après le point $iii)$ du Théorème 4.1.8, quitte à diviser A par $w_\rho(A)$, on peut supposer que $w_\rho(A) = 1$.
D'après le point $iv)$ de ce théorème, on a $A \in C_\rho(H)$, donc on a $\mathcal{K}$ un Hilbert contenant H et $U \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ unitaire tel que $A^m = \rho.P_H \cdot U^m \cdot P_H$, pour tout $m \geq 1$. On a alors $(A^n)^m = \rho.P_H \cdot (U^n)^m \cdot P_H$.
Comme U^n est encore unitaire, on a $A^n \in C_\rho(H)$, donc $w_\rho(A^n) \leq 1 = w_\rho(A)^n$. □

Proposition 4.1.11. —
Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. Soient $0 < \rho_1 < \rho_2$.
Alors on a $w_{\rho_2}(A) \leq w_{\rho_1}(A)$ et $C_{\rho_1}(H) \subset C_{\rho_2}(H)$.
On a de plus $r(A) \leq w_{\rho_1}(A)$.
Si $\rho_2 \geq 1$, on a aussi : $\frac{1}{\rho_2}\|A\| \leq w_{\rho_2}(A) \leq \|A\|$.

Démonstration.
Grâce aux points $iii)$ et $iv)$ du Théorème 4.1.8, quitte à considérer $\frac{1}{w_{\rho_1}(A)}A$, on peut supposer $w_{\rho_1}(A) = 1$. Montrons alors que $w_{\rho_2}(A) \leq 1$, c'est-à-dire $A \in C_{\rho_2}(H)$.
Appliquons le Théorème 4.1.3 avec ρ_1. On a donc $r(A) \leq 1$, et,
pour tous $x \in H, z \in \mathbb{D}$ on a $Re(\langle (I - z.A)x, x\rangle) \geq (1 - \frac{\rho_1}{2})\|(I - zA)x\|^2 \geq (1 - \frac{\rho_2}{2})\|(I - zA)x\|^2$.
D'une part, on obtient bien $r(A) \leq 1 = w_{\rho_1}(A)$.
D'autre part, en appliquant le Théorème 4.1.3 avec ρ_2, on obtient $A \in C_{\rho_2}(H)$, ce que l'on voulait.
Le point $iv)$ du Théorème 4.1.8 montre alors que $C_{\rho_1}(H) \subset C_{\rho_2}(H)$.
Si $\rho_2 > 1$, en prenant $\rho_1 = 1$, et en utilisant le point $ii)$ du Théorème 4.1.8 ainsi que la Remarque 4.1.9, on obtient l'encadrement voulu. □

Proposition 4.1.12. *[4]*—
On a : $w_\rho(I) = \left| \begin{array}{l} 1 \text{ si } \rho \geq 1 \\ \frac{2}{\rho} - 1 \text{ si } 0 < \rho < 1 \end{array} \right.$

Démonstration.
On a $w_1(I) = 1 = r(I)$. D'après la Proposition 4.1.11, on a donc $w_\rho(I) = 1$ pour tout $\rho \geq 1$.
Supposons $0 < \rho < 1$. On doit ainsi chercher les $u > 0$ tels que $\frac{1}{u}I \in C_\rho(H)$.
Les conditions (II) et (I_ρ) du Théorème 4.1.3 impliquent que l'on doit avoir $r(\frac{1}{u}I) \leq 1$,
c'est-à-dire $u \geq 1$, et $Re(1 - \frac{z}{u}) \geq (1 - \frac{\rho}{2})|1 - \frac{z}{u}|^2$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.
Comme pour tout $w \in \mathbb{C}$ avec $w \neq 0$, on a $Re(w^{-1}) = \frac{Re(w)}{|w|^2}$, on cherche alors
les $u \geq 1$ tels que : $Re((1 - \frac{z}{u})^{-1}) \geq (1 - \frac{\rho}{2})$, $\forall\, z \in \mathbb{D}$.
Pour $w = (1 - \frac{z}{u})$, w décrit le disque fermé de centre 1 et de rayon $\frac{1}{u}$ lorsque z décrit $\overline{\mathbb{D}}$.

L'image par l'application $z \mapsto \frac{1}{z}$ de ce disque fermé est un disque fermé ou un demi-plan fermé, selon si $u > 1$ ou $u = 1$.
Dans les deux cas, le point de partie réelle minimale de cet ensemble image est $(1 + \frac{1}{u})^{-1}$.
En prenant $z_n = -1 + \frac{1}{n}$, on doit ainsi avoir : $(1 + \frac{1}{u})^{-1} \geq (1 - \frac{\rho}{2})$ en passant à la limite.
On cherche donc tous les $u \geq 1$ vérifiant $\frac{u}{u+1} \geq (1 - \frac{\rho}{2})$, ce qui équivaut à $u(1 - (1 - \frac{\rho}{2})) \geq (1 - \frac{\rho}{2})$, puis $u \geq \frac{2-\rho}{\rho}$.
Comme on a $0 < \rho < 1$, on a $\frac{2}{\rho} - 1 > 1$. Le plus petit u possible est alors $\frac{2}{\rho} - 1$, donc $w_\rho(I) = \frac{2}{\rho} - 1$. □

Proposition 4.1.13. *[3]—*
Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, $\rho > 0$, et $\alpha > 0$. On a l'équivalence :
$i)$ $w_\rho(A) \leq \alpha$
$ii)$ $r(A) \leq \alpha$, $((\rho - 1).zA - \rho.\alpha.I)$ est inversible, et $\|(zA) \cdot ((\rho - 1).zA - \rho.\alpha.I)^{-1}\| \leq 1$, $\forall\, z \in \mathbb{D}$.

Démonstration.
Posons $B = \frac{1}{\alpha}A$. D'après $iii)$ du Théorème 4.1.8, l'expression de gauche est équivalente à $w_\rho(B) \leq 1$.
On a aussi $r(A) \leq \alpha$ ssi $r(B) \leq 1$, ainsi que :
$(zA) \cdot ((\rho - 1).zA - \rho.\alpha.I)^{-1} = (z\frac{1}{\alpha}A) \cdot ((\rho - 1).z\frac{1}{\alpha}A - \rho.I)^{-1} = (zB) \cdot ((\rho - 1).zB - \rho.I)^{-1}$.
On se ramène donc au cas $\alpha = 1$, quitte à considérer $((\rho - 1).zA - \rho.\alpha.I)$.
$i) \Rightarrow ii)$ Appliquons le Corollaire 4.1.5. La condition (II) nous donne $r(A) \leq 1$.
Aini, $C_z = \frac{2}{\rho}(I - zA)^{-1} + (1 - \frac{2}{\rho}).I_H$ est bien défini pour tout $z \in \mathbb{D}$, et on a $Re(C_z) \geq 0$, c'est-à-dire $W(C_z) \subset Re_{\geq 0}$. D'après la Proposition 3.2.9, on a donc $\|(C_z - I)(I + C_z)^{-1}\| \leq 1$.
Or, $C_z = (I - (1 - \frac{2}{\rho})zA)(I - zA)^{-1}$.
Ainsi, $C_z - I = [(I - (1 - \frac{2}{\rho})zA) - (I - zA)] \cdot (I - zA)^{-1} = \frac{2}{\rho}z.A \cdot (I - zA)^{-1}$.
Et, $(I + C_z) = [I - zA + (I - (1 - \frac{2}{\rho})zA)] \cdot (I - zA)^{-1} = [2.I + (\frac{2}{\rho} - 2)z.A] \cdot (I - zA)^{-1}$.
On obtient donc que $(C_z - I)(I + C_z)^{-1} = \frac{2}{\rho}z.A \cdot (I - zA)^{-1} \cdot (I - zA) \cdot [2.I + (\frac{2}{\rho} - 2)z.A]$.
D'où $(C_z - I)(I + C_z)^{-1} = \frac{1}{\rho}z.A \cdot [I + (\frac{1}{\rho} - 1)z.A] = z.A \cdot [\rho.I + (1 - \rho)z.A]^{-1} = -z.A \cdot [-\rho.I + (\rho - 1)z.A]^{-1}$.
Ainsi, $((\rho - 1).zA - \rho.I)$ est inversible, et on a $\|(zA) \cdot ((\rho - 1).zA - \rho.I)^{-1}\| \leq 1$.
$ii) \Rightarrow i)$ La condition (II) du Corollaire 4.1.5 est vérifiée. Montrons que la condition $(\tilde{I}_\rho)$ l'est aussi.
Posons $D_z = (zA) \cdot ((1 - \rho).zA + \rho.I)^{-1}$.
D'après le Lemme 3.2.10, pour tout $w \in \mathbb{D}$, on a $Re((I + w.D_z)(I - w.D_z)^{-1}) \geq 0$.
Cela donne :

$$(I+w.D_z)(I-w.D_z)^{-1} = [\rho.I+(w+1-\rho)z.A][(\rho-1).zA-\rho.I]^{-1} \cdot [[\rho.I+(-w+1-\rho)z.A][(\rho-1).zA-\rho.I]^{-1}]^{-1}$$

Donc, $(I + w.D_z)(I - w.D_z)^{-1} = [\rho.I + (w + 1 - \rho)z.A][\rho.I + (-w + 1 - \rho)z.A]^{-1}$.
Or, comme $r(A) \leq 1$, $(I - zA)$ est inversible, donc $[\rho.I + (-w + 1 - \rho)z.A]^{-1}$ converge vers $\frac{1}{\rho}.(I - zA)^1$ quand $w \to 1$ par continuité de $B \mapsto B^{-1}$.
Ainsi, $(I + w.D_z)(I - w.D_z)^{-1}$ converge vers $[\rho.I + (2 - \rho)z.A][\rho.I - \rho.z.A]^{-1} = C_z$ pour $w \to 1$.
On a donc $Re(C_z) \geq 0$, pour tout $z \in \mathbb{D}$.
La condition $(\tilde{I}_\rho)$ est donc vérifiée, et on trouve $w_\rho(A) \leq 1$ en appliquant le Corollaire 4.1.5. □

Corollaire 4.1.14. —
La condition $r(A) \leq \alpha$ de la Proposition 4.1.13 est redondante.

Démonstration.
Voir [8] C.Davis, *The shell of a Hilbert-space operator* , p.69-86. □

Corollaire 4.1.15. *[3]—*
Soit $A \in \mathcal{L}(H)$.
Pour tout $0 < \rho < 2$, on a $\rho.w_\rho(A) = (2 - \rho).w_{2-\rho}(A)$.

Démonstration.
Le cas $\rho = 1$ est vrai, car $2 - 1 = 1$.

Par symétrie, supposons $1 < \rho < 2$. Soient $z \in \mathbb{D}$, et $\alpha > 0$.
Montrons que l'on a l'équivalence entre $w_\rho(A) \le \frac{\alpha}{\rho}$ et $w_{2-\rho}(A) \le \frac{\alpha}{2-\rho}$.
On a : $[((2-\rho)-1)z.A - (2-\rho)\frac{\alpha}{2-\rho}.I] = -(\rho-1)z.A - \alpha.I = [(\rho-1)(-z).A - \rho\frac{\alpha}{\rho}.I]$.
Comme $-z$ décrit $\mathbb{D}$ lorsque z décrit $\mathbb{D}$, $[((2-\rho)-1)z.A - (2-\rho)\frac{\alpha}{2-\rho}.I]$ est inversible pour tout $z \in \mathbb{D}$ si et seulement si $[(\rho-1)z.A - \rho\frac{\alpha}{\rho}.I]$ l'est.
De même, on aura $\|z.A \cdot [((2-\rho)-1)z.A - (2-\rho)\frac{\alpha}{2-\rho}.I]^{-1}\| \le 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$ si et seulement si $\|z.A \cdot [(\rho-1)z.A - \rho\frac{\alpha}{\rho}.I]^{-1}\| \le 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.
En prenant $\alpha = \rho.w_\rho(A)$, on a alors $w_{2-\rho}(A) \le \frac{\rho.w_\rho(A)}{2-\rho}$,
et en prenant $\alpha = (2-\rho).w_{2-\rho}(A)$ on a $w_\rho(A) \le \frac{(2-\rho).w_{2-\rho}(A)}{\rho}$, ce qui conclut. □

Corollaire 4.1.16. —
Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ et $\rho > 0$.
Si $w(A) = \|A\|$, alors on a $w_\rho(A) = \left| \begin{array}{l} \|A\| \text{ si } \rho \ge 1 \\ (\frac{2}{\rho} - 1).\|A\| \text{ si } 0 < \rho < 1 \end{array} \right.$

Démonstration.
D'après la Proposition 3.3.4, on a $r(A) = \|A\|$. Donc, pour tout $1 \le \rho$, on a $w_\rho(A) = 1$ d'après la Proposition 4.1.11.
Le Corollaire 4.1.15 conclut pour le cas $0 < \rho < 1$. □

Corollaire 4.1.17. —
, $i)$ Soient $H_1, .., H_n$ des Hilberts, et $A_i \in \mathcal{L}(H_i)$, $\forall\, 1 \le i \le n$.
Soient $H := \oplus_{i=1}^n H_i$, $A := \oplus_{i=1}^n A_i \in \mathcal{L}(H)$, et $\rho > 0$.
Alors, $w_\rho(A) = \max(\{w_\rho(A_1), .., w_\rho(A_n)\})$.
$ii)$ Soient $(H_m)_m$ une suite de Hilberts, et $A_m \in \mathcal{L}(H_m)$ avec $\sup_m(\|A_m\|) < +\infty$.
Alors pour $H := \oplus_{m\ge0} H_m$, $A := \oplus_{m\ge0} H_m$, et $\rho > 0$,
on a : $A \in \mathcal{L}(H)$ et $w_\rho(A) = \sup_n(w_\rho(A_m))$.

Démonstration.
$i)$ Soit $\alpha > 0$. On a $\|A\| = \max_i(\|A_i\|)$, $r(A) = \max_i(r(A_i))$ et $((\rho-1).zA - \rho.\alpha.I)$ est inversible si et seulement si tous les $((\rho-1).zA_i - \rho.\alpha.I)$ le sont.
La Proposition 4.1.13 implique alors que $w_\rho(A) \le \alpha$ ssi $w_\rho(A_i) \le \alpha\ \forall\, 1 \le i \le n$, donc $w_\rho(A) = \max(\{w_\rho(A_1), .., w_\rho(A_n)\})$.
$ii)$ On a $\|A\| = \sup_m(\|A_m\|) < +\infty$, donc $A \in \mathcal{L}(H)$. On a de plus $r(A) = \sup_m(r(A_m))$ et $((\rho-1).zA - \rho.\alpha.I)$ est inversible si et seulement si tous les $((\rho-1).zA_m - \rho.\alpha.I)$ le sont.
La Proposition 4.1.13 implique alors que $w_\rho(A) \le \alpha$ ssi $w_\rho(A_m) \le \alpha\ \forall\, m \ge 0$, donc $w_\rho(A) = \sup_m(w_\rho(A_m))$.
□

Proposition 4.1.18. *[3]*—
Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ et $\rho > 0$.
Si $A^2 = 0$, alors $w_\rho(A) = \frac{1}{\rho}\|A\|$.
Si $A^2 = A$ et $A \ne 0$, alors $w_\rho(A) = \frac{1}{\rho}(\|A\| + |\rho - 1|)$.

Démonstration.
Soit $\alpha > 0$ tel que $w_\rho(A) \le \alpha$. Soit $z \in \mathbb{D}$.
Supposons que $A^2 = 0$. On a alors $r(A) = 0$, et $zA = [(\rho-1)z.A - \rho.\alpha.I)] \cdot \frac{1}{\rho.\alpha} z.A$.
Donc, $\|z.A \cdot [(\rho-1)z.A - \rho.\alpha.I)]^{-1}\| \le 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\rho.\alpha}|z|\|A\| \le 1$.
Cela est équivalent à $\frac{1}{\rho}\|A\| \le \alpha$ car ce doit être vrai pour tout $z \in \mathbb{D}$.
Donc, $w_\rho(A) = \frac{1}{\rho}\|A\|$ par minimalité des α tels que $w_\rho(A) \le \alpha$.

Supposons que $A^2 = A$. On a alors $r(A) = 1$, donc $w_\rho(A) \ge 1$, donc $\alpha \ge 1$.
Ainsi, $(\rho-1)z - \rho.\alpha \ne 0$, ce qui donne $zA = [(\rho-1)z.A - \rho.\alpha.I)] \cdot (\frac{1}{(\rho-1)z - \rho.\alpha}) z.A$.

Donc, $\|z.A \cdot [(\rho-1)z.A - \rho.\alpha.I)]^{-1}\| \leq 1 \Leftrightarrow \|A\| \leq |(\rho-1)z - \rho.\alpha|$.
Pour z décrivant $\mathbb{D}$, $(\rho-1)z - \rho.\alpha$ décrit $\mathbb{D}(-\rho.\alpha, |\rho-1|)$.
Comme $\rho.\alpha > |\rho-1|$, l'élément de module minimal de l'adhérence de ce disque est $\rho.\alpha - |\rho-1|$.
La dernière inégalité est ainsi équivalente à : $\|A\| + |\rho-1| \leq \rho.\alpha$.
Donc, $w_\rho(A) = \frac{1}{\rho}(\|A\| + |\rho-1|)$ par minimalité des α tels que $w_\rho(A) \leq \alpha$. □

Remarque 4.1.19. —
Les classes $C_\rho(H)$ sont ainsi toutes non-vides, et toutes strictement incluses les unes dans les autres, au vu de la Proposition 4.1.18.
La Proposition 4.1.10 montre de plus que toutes ces classes sont incluses dans l'ensemble des opérateurs à puissances bornées car on a alors $\|A^n\| \leq \max(\rho, 1).w_\rho(A^n) \leq \max(\rho, 1).1^n$.
Il existe toutefois des opérateurs à puissances bornées qui ne sont dans aucun $C_\rho(H)$. (cf [16], S. 4)
Les classes $C_\rho(H)$ sont denses dans cet ensemble[4], car pour A à puissances bornées
et $\varepsilon > 0$, on a $r((1-\varepsilon)A) < 1$ donc $(1-\varepsilon)A$ appartient à un $C_\rho(H)$ d'après le Lemme 4.2.6.

4.2 Comportement de w_ρ, Théorèmes autour de la condition $w_\rho(A) \leq 1$

Proposition 4.2.1. —
Si $0 < \rho \leq 2$, alors la fonction $w_\rho(.)$ est une norme sur $\mathcal{L}(H)$.

Démonstration.
Montrer que w_ρ est une norme revient à montrer que sa "boule unité" est convexe.
Or, d'après le point $iv)$ du Théorème 4.1.8, on a $w_\rho(A) \leq 1 \Leftrightarrow A \in C_\rho(H)$.
Cela revient donc à montrer que $C_\rho(H)$ est convexe lorsque $\rho \leq 2$.
Soient $A, B \in C_\rho(H)$, soit $\lambda \in]0, 1[$.
Utilisons le Théorème 4.1.3. Comme $\rho \leq 2$, la condition (II) est redondante.
La condition (I_ρ) appliquée à A et B nous donne alors :
$Re(\langle [I - z(\lambda.A + (1-\lambda).B)]x, x\rangle) \geq (1 - \frac{\rho}{2})[\lambda.\|(I - zA)x\|^2 + (1-\lambda).\|(I - zB)x\|^2], \forall x \in H, z \in \mathbb{D}$.
Or, $\|.\| : H \to \mathbb{R}_+$ est convexe, et $y \mapsto y^2$ est convexe croissante sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, $x \mapsto \|x\|^2$ est convexe comme composée d'une fonction convexe et d'une fonction convexe croissante.
De plus, $(1 - \frac{\rho}{2}) \geq 0$ car $\rho \leq 2$. Ces deux éléments impliquent :
$Re(\langle [I - z(\lambda.A + (1-\lambda).B)]x, x\rangle) \geq (1 - \frac{\rho}{2})\|[I - z(\lambda.A + (1-\lambda).B)]x\|^2, \forall x \in H, z \in \mathbb{D}$.
Donc $\lambda.A + (1-\lambda).B \in C_\rho$ d'après le Théorème 4.1.3. □

Remarque 4.2.2. —
Il sera montré au Corollaire 4.2.12 que $w_\rho(.)$ est une norme si et seulement si $\rho \leq 2$.
On verra dans la suite que pour $\rho > 1$, les rayons d'opérateurs $w_\rho(.)$ ne sont pas sous-multiplicatifs, même si l'on ajoute des conditions de commutativité sur A et B.

Proposition 4.2.3. *[4]*—
Soient $\rho, \tau > 0$, et $A, B \in \mathcal{L}(H)$ qui double-commutent. ($AB = BA$, $A^*B = BA^*$)
Alors, on a $w_{\rho.\tau}(A \cdot B) \leq w_\rho(A).w_\tau(B)$.

Démonstration.
Quitte à considérer $\frac{1}{w_\rho(A)}A$ et $\frac{1}{w_\tau(B)}(B)$, on peut supposer que $w_\rho(A) = w_\tau(B) = 1$. Montrons alors que $w_{\rho.\tau}(A \cdot B) \leq 1$.
D'après le point $iv)$ du Théorème 4.1.8, on a $A \in C_\rho(H)$ et $B \in C_\tau(H)$. D'après le Théorème 4.1.6, les séries $\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{int}A_\rho(n)$ et $\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{int}B_\tau(n)$ sont absolument convergente, et leur somme est auto-adjointe positive, pour tous $0 \leq r < 1, t \in \mathbb{R}$.
La double-commutativité de A et B implique que $A_\rho(n)$ et $B_\tau(m)$ commutent $\forall\, m, n \in \mathbb{Z}$.
De plus, on a $A_\rho(n).B_\tau(n) = (AB)_{\rho.\tau}(n)$, par définition de ces quantités. Ainsi, la Proposition 3.5.4 nous dit que la série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{int}(AB)_{\rho.\tau}(n)$ est absolument convergente $\forall\, 0 \leq r < 1, t \in \mathbb{R}$.
Le Théorème 4.1.6 implique que $A \cdot B \in C_{\rho.\tau}(H)$, et le point $iv)$ nous donne $w_{\rho.\tau}(A \cdot B) \leq 1$. □

Proposition 4.2.4. —
Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ et $0 < \rho < \tau$.
Alors on a : $w_\tau(A) \leq w_\rho(A)$, et $w_\rho(A) \leq (\frac{2\tau}{\rho} - 1).w_\tau(A)$.
Ainsi, $\rho \mapsto w_\rho(A)$ est continue et décroissante sur $]0, +\infty[$.

Démonstration.
Utilisons pour cela la Proposition 4.2.3 ainsi que la Proposition 4.1.12.
On a d'une part : $w_\tau(A) = w_{\frac{\tau}{\rho}.\rho}(IA) \leq w_{\frac{\tau}{\rho}}(I).w_\rho(A) = w_\rho(A)$ car $\frac{\tau}{\rho} > 1$.
D'autre part : $w_\rho(A) = w_{\frac{\rho}{\tau}.\tau}(IA) \leq w_{\frac{\rho}{\tau}}(I).w_\tau(A) = (\frac{2\tau}{\rho} - 1).w_\tau(A)$ car $\frac{\rho}{\tau} < 1$.
Ainsi, $\rho \mapsto w_\rho(A)$ est décroissante, et l'encadrement $w_\tau(A) \leq w_\rho(A) \leq (\frac{2\tau}{\rho} - 1).w_\tau(A)$ implique la continuité de cette fonction. □

Remarque 4.2.5. —
En utilisant le Corollaire 4.2.1, on obtient ainsi que $\rho.w_\rho(A) \to_{r \to 0^+} 2.w_2(A)$.
Ando et Nishio montrent dans [3][Thm. 1] que la fonction $\rho \mapsto w_\rho(A)$ est log-convexe, grâce à un résultat sur les fonctions analytiques à valeurs dans un espace d'opérateurs et à une adaptation du Corollaire 4.1.5 pour la condition $w_\rho(A) \leq \alpha$.
Ceci implique que est $\rho \mapsto w_\rho(A)$ continue, convexe, et décroissante.
Ainsi, si l'on a $w_{\rho_1}(A) = w_{\rho_2}(A)$ pour $0 < \rho_1 < \rho_2$, $\rho \mapsto w_\rho(A)$ est constante sur $[\rho_1, +\infty[$ ([4] Thm.5.3), chose qui a été constatée au Corollaire 4.1.16 avec la condition $w_1(A) = w_2(A)$.

Lemme 4.2.6. —
Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ tel que $r(A) < 1$.
Alors il existe $\rho > 0$ tel que $w_\rho(A) \leq 1$.

Démonstration.
Soit $s > 1$ tel que $r(sA) < 1$. Comme $(s^n \|A^n\|)^{\frac{1}{n}} \to r(sA)$, on a donc $B > 0$ tel que $s^n \|A^n\| \leq B$.
Ainsi, pour tout $z = re^{it} \in \mathbb{D}$, on a $\| \sum_{n \geq 1} (zA)^n \| \leq \sum_{n \geq 1} \|A^n\| \leq \sum_{n \geq 1} \frac{B}{s^n} = M < +\infty$.
D'après la preuve du point $i)$ du Théorème 4.1.8, comme $r(A) < 1$, on a :
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int} A_\rho(n) = I - \frac{2}{\rho} Re(\sum_{n \geq 1} r^n e^{int} (A)^n)$.
On récupère aussi : $I - \frac{2}{\rho} Re(\sum_{n \geq 1} r^n e^{int} (A)^n) \geq (1 - \frac{2}{\rho} \| \sum_{n \geq 1} (re^{it} A)^n \|) I \geq (1 - \frac{2}{\rho} M).I$.
Pour $\rho \geq 2M$, on a $(1 - \frac{2}{\rho} M)$, donc $\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int} A_\rho(n) \geq 0$,
ce qui implique que $A \in C_\rho(H)$, donc que $w_\rho(A) \leq 1$. □

Proposition 4.2.7. *[4]*—
Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. On a $\lim_{\rho \to +\infty} (w_\rho(A)) = r(A)$.

Démonstration.
D'après les Propositions 4.2.4 et 4.1.11, la fonction $\rho \mapsto w_\rho(A)$ est décroissante et minorée par $r(A)$.
Il suffit donc de montrer que l'on peut approcher $r(A)$ aussi près que l'on veut avec des $w_\rho(A)$.
Soit $\varepsilon > 0$.
Si $r(A) = 0$, on a $r(\frac{1}{\varepsilon} A) = 0$. Le Lemme 4.2.7 nous dit qu'il existe $\rho > 0$ tel que $w_\rho(\frac{1}{\varepsilon} A) \leq 1$, ce qui donne $0 = r(A) \leq w_\rho(A) \leq \varepsilon$.
Sinon, $r(A) \neq 0$. On a $r(\frac{A}{(1+\varepsilon) r(A)}) < 1$, donc le Lemme 4.2.7 nous donne
un $\rho > 0$ tel que $w_\rho(\frac{A}{(1+\varepsilon) r(A)}) \leq 1$.
Cela donne : $r(A) \leq w_\rho(A) \leq (1 + \varepsilon) r(A)$, ce qui conclut. □

Proposition 4.2.8. —
Soient $A, B \in \mathcal{L}(H)$, et $\rho \geq 1$.
Alors on a $w_\rho(A \cdot B) \leq \rho^2 w_\rho(A).w_\rho(B)$.
De plus, ce résultat est optimal pour $dim(H) \geq 2$.

Démonstration.
On a $w_\rho(A \cdot B) \leq w_1(A \cdot B) \leq \|A\|.\|B\| \leq (\rho w_\rho(A)).(\rho w_\rho(B))$, d'après la Proposition 4.1.11.

De plus, en prenant $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On a $\|A\| = \|B\| = \|A \cdot B\| = 1$, $A^2 = B^2 = 0$, et $A \cdot B$ auto-adjointe.
Les Propositions 4.1.18 et 4.1.16 nous disent alors que $w_\rho(A) = w_\rho(B) = \frac{1}{\rho}$ et que $w_\rho(A \cdot B) = 1$.
Si $dim(H) \geq 2$, on peut alors construire des opérateurs de rang 2 similaires à A et B sur un sous-espace vectoriel de dimension 2. □

Proposition 4.2.9. —
Soient $\rho > 0$ et $A, B \in \mathcal{L}(H)$ qui double-commutent. ($AB = BA$, $A^*B = BA^*$)
Alors on a $w_\rho(A \cdot B) \leq \rho w_\rho(A).w_\rho(B)$.
De plus, ce résultat est optimal pour $dim(H) \geq 4$.

Démonstration.
D'après la Proposition 4.2.3 et le point de $ii)$ du Théorème 4.1.8,
on a : $w_\rho(A \cdot B) \leq w_1(A).w_\rho(B) \leq (\rho.w_\rho(A)).w_\rho(B)$, car $w_1(.) = \|.\|$.
De plus, en prenant $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On montre de même que A et B double-commutent, que $\|A\| = \|B\| = \|A \cdot B\|$,
et que $A^2 = B^2 = (AB)^2 = 0$.
Ainsi, d'après la Proposition 4.1.18, on a $w_\rho(A) = w_\rho(B) = w_\rho(A \cdot B) = \frac{1}{\rho}$.
Si $dim(H) \geq 4$, on peut alors construire des opérateurs de rang 4 similaires à A et B sur un sous-espace vectoriel de dimension 4. □

Proposition 4.2.10. —
Soient $A, B \in \mathcal{L}(H)$ qui commutent et $\rho > 0$ tel que $w_\rho(.)$ est une norme.
Alors on a $w_\rho(A \cdot B) \leq 2 w_\rho(A).w_\rho(B)$.
Dans le cas $\rho = 2$, ce résultat est optimal pour $dim(H) \geq 4$.

Démonstration.
La preuve est identique à celle du point $ii)$ de la Proposition 3.3.11.
Dans le cas $\rho = 2$, on a $w_2(.) = w(.)$, et l'optimalité est donnée par la Proposition 3.3.11. □

Proposition 4.2.11. —
Soit $\rho > 1$.
Il existe une constante $1 \leq \alpha < \rho$ telle que pour tout Hilbert H, pour tous $A, B \in \mathcal{L}(H)$ qui commutent, on ait : $w_\rho(A \cdot B) \leq \alpha.w_\rho(A).\|B\|$.

Démonstration.
On a $\alpha \leq \rho$ car $w_\rho(A \cdot B) \leq \|A \cdot B\| \leq \|A\|.\|B\| \leq \rho.w_\rho(A).\|B\|$.
Avec le Corollaire 4.1.17, et la preuve de la Proposition 3.3.12, on montre qu'il existe un Hilbert H et $A, B \in \mathcal{L}(H)$ non-nuls, qui commutent, tels que $w_\rho(A \cdot B) = \alpha.w_\rho(A).w_\rho(B)$.
Supposons par l'absurde que $\alpha = \rho$.
Comme $\rho > 1$, on a : $\|A \cdot B\| \geq w_\rho(A \cdot B) = (\rho.w_\rho(A)).\|B\| \geq \|A\|.\|B\| \geq \|A \cdot B\|$.
Toutes les inégalités sont donc des égalités. On a ainsi $w_\rho(A \cdot B) = \|A \cdot B\|$, donc $r(A \cdot B) = \|A \cdot B\|$ d'après la Remarque 4.2.5(Voir [4] Thm.5.3), d'où $r(A \cdot B) = \rho.w_\rho(A)\|B\|$.
Cependant, comme A et B commutent, on a $r(A \cdot B) \leq r(A).r(B) \leq w_\rho(A).\|B\|$.
Comme $w_\rho(A)$ et $\|B\|$ sont non-nuls et comme $\rho > 1$, on aboutit à une contradiction. Donc, $\alpha < \rho$. □

Corollaire 4.2.12. —
Pour tout $\rho > 2$ et pour $dim(H) \geq 4$, $w_\rho(.)$ n'est pas une norme.

Démonstration.
La preuve de la Proposition 4.2.9 nous donne A et B non-nuls qui commutent

et tels que $w_\rho(A \cdot B) = \rho w_\rho(A).w_\rho(B) > 2w_\rho(A).w_\rho(B)$, car $\rho > 2$.
D'après la proposition 4.2.10, $w_\rho(.)$ ne peut pas être une norme. $\square$

Théorème 4.2.13. —
Soient $A \in \mathcal{L}(H)$, et $\rho > 0$ tels que $w_\rho(A) \leq 1$.
Posons $\mathbb{A}_0(\mathbb{D}) := \{f \in C^0(\overline{\mathbb{D}}) \cap Hol(\mathbb{D}) \text{ tq } f(0) = 0\}$, muni de la norme $\|.\|_\infty$.
$i)$ Alors il existe un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres $\Phi_A : \begin{array}{ccc} \mathbb{A}_0(\mathbb{D}) & \to & \mathcal{L}(H) \\ f & \mapsto & \Phi_A(f) =: f(A) \end{array}$
tel que : $\Phi_A(x \mapsto x) = A$ et $\|f(A)\| \leq \rho\|f\|_\infty$.
De plus, pour $\mathcal{K}$ un Hilbert contenant H et $U \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ unitaire tel que $A^n = \rho.P_H \cdot U^n \cdot P_H$, $\forall n \geq 1$, on a $f(A) = \rho.P_H \cdot f(U) \cdot P_H = \lim\limits_{r \to 1^-} f(rA)$.
$ii)$ On a de plus $w_\rho(f(A)) \leq \|f\|_\infty$.
$iii)$ Ce morphisme s'étend à $C^0(\overline{\mathbb{D}}) \cap Hol(\mathbb{D})$, avec :
$f(A) := \lim\limits_{r \to 1^-} f(rA)$, et $f(A) + (\rho - 1)f(0).I = \rho.P_H \cdot f(U) \cdot P_H$.
$iv)$ Pour $\|f\|_\infty \leq 1$, le morphisme étendu vérifie : $w_\rho(f(A)) \leq 1 + 2|f(0)|$.

Démonstration.
$i)$ La preuve est identique à celle du Théorème 3.5.9, en remplaçant l'utilisation du Théorème 3.5.8 par celle du Théorème 4.1.8, et en remplaçant 2 par ρ.
$ii)$ La preuve est identique à celle du Théorème 3.5.11, en remplaçant l'utilisation des Théorèmes 3.5.8 et 3.5.9 par celle du point $i)$ et du Théorème 4.1.8, et en remplaçant 2 par ρ.
$iii)$ La preuve est identique à celle du Corollaire 3.5.10, en remplaçant l'utilisation des Théorèmes 3.5.8 et 3.5.9 par celle du point $i)$ et du Théorème 4.1.8, et en remplaçant 2 par ρ.
$iv)$ La preuve est identique à celle du Corollaire 3.5.13, en remplaçant l'utilisation du Théorème 3.5.11 par celle du point $ii)$. $\square$

Références

[1] OKUBO K. ANDO T. Operator radii of commuting products. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 56(1) :203–210, 1976.

[2] LI Chi-Kwong ANDO Tsuyoshi. Operator radii and unitary operators. *Operators and Matrices*, 4(2) :273–281, 2010.

[3] NISHIO Katsuyoshi ANDO Tsuyoshi. Convexity properties of operator radii associated with unitary ρ-dilations. *Michigan Mathematical Journal*, 20(4) :303–307, 1974.

[4] HOLBROOK John A.R. On the power-bounded operators of sz.nagy and foias. *Acta Scientiarum Mathematicarum*, 29(3-4) :299–310, 1968.

[5] HOLBROOK John A.R. Multiplicative properties of the numerical radius in operator theory. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 237 :166–174, 1969.

[6] SIMON Barry. *Operator theory : A comprehensive course in Analysis, Part 4*. American Mathematicatical Society, 2015.

[7] STAMPLFI J.G BERGER C.A. Mapping theorems for the numerical range. *American Journal of Mathematics*, 89(4) :1047–1055, 1967.

[8] DAVIS Ch. The shell of a hilbert-space operator. *Acta Scientiarum Mathematicarum*, 29(1) :69–86, 1968.

[9] DONOGHUE Jr. William F. On the numerical range of a bounded operator. *Michigan Mathematical Journal*, 4 :261–263, 1957.

[10] RAO Duggirala K.M. GUSTAFSON Karl E. *Numerical Range. The Field of Values of Linear Operators and Matrices*. Springer-Verlag, 1997.

[11] BERBERIAN Sterling K. Approximate proper vectors. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 13(1) :111–114, 1962.

[12] RANSFORD Thomas KLAJA Hubert, MASHREGHI Javad. On mapping theorems for numerical range. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 144(7) :3009–3018, 2016.

[13] FILMORE P.A. *Notes on Operator Theory*. D. Van Nostrand Company, 1970.

[14] SZ.-NAGY Béla RIESZ Frédéric. *Leçons d'analyse fonctionnelle*. Académie des sciences de Hongrie, 1968.

[15] SHIU Elias S.W. Growth of numerical ranges of powers of hilbert space operators. *Michigan Mathematical Journal*, 23(4) :155–160, 1976.

[16] FOIAS Ciprian SZ.-NAGY Béla. On certain classes of power-bounded operators in hilbert space. *Acta Scientiarum Mathematicarum*, 27(1-2) :17–25, 1966.

[17] KATO Tosio. Some mapping theorems for the numerical range. *Proceedings of the Japan Academy*, 41(8) :652–655, 1965.